Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Arne Zantop (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 701)

2. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Do. 2.11.2017 im Tutorium (12:15 - 13:45 EW 731)

M **Aufgabe 5**: *Helmholtz Freie Energie und maximale Arbeit*

Zeigen Sie: Die Änderung der Helmholtz Freien Energie ΔF entspricht bei isothermen Prozessen, bei denen außerdem die Teilchenzahl konstant bleibt, der maximalen Arbeit ΔW, die ein System verrichten kann:

$$|\Delta W| \leq (-\Delta F) \; . \tag{1}$$

S **Aufgabe 6 (4 Punkte):** *Würfelspiele*

Man stelle sich zwei Würfel vor, die geworfen werden.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem der Würfel eine 2 oben liegt.

(b) Bestimmen Sie unter der Hypothese, dass die Augensumme 6 ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 2 oben liegt.

Man nehme nun an, dass einer der Würfel gezinkt ist ($p_1 = \ldots = p_5 = 1/10$ und $p_6 = 1/2$) und der andere ordungsgemäß funktioniert ($p_1 = \ldots = p_6 = 1/6$). Dabei bezeichnet p_i jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Wurf die Zahl i oben liegt.

(c) Sie greifen sich einen der Würfel und werfen ihn zweimal, wobei jeweils die 6 erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim dritten Wurf wieder die 6 oben liegt?

Hinweis: Der Satz von Bayes kann Ihnen bei Teil (c) behilflich sein.

M **Aufgabe 7**: *Charakteristische Funktion*

Die Fouriertransformierte einer Verteilung $P(x)$ (bzw. den Erwartungswert $\langle e^{-ikx} \rangle$) nennt man charakteristische Funktion:

$$G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} P(x) \, dx \; . \tag{2}$$

Berechnen Sie $G(k)$ für

(a) die homogene Verteilung:

$$P_a(x) = \begin{cases} 1/2a, & -a < x < a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \; , \tag{3}$$

(b) die Exponentialverteilung:

$$P_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \; , \tag{4}$$

(c) die Normalverteilung

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2} \right\} \; . \tag{5}$$

(d) Mit Hilfe von $G(k)$ kann man die Momente berechnen:

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{(-i)^n} \left. \frac{d^n G(k)}{dk^n} \right|_{k=0} . \tag{6}$$

Berechnen Sie damit den Erwartungswert $\langle x \rangle$ und die Varianz $(\Delta x)^2$ der Normalverteilung (7).

S **Aufgabe 8 (3 Punkte):** *Zentrale Momente der Normalverteilung*
Zeigen Sie, dass die zentralen Momente der Normalverteilung (5) gegeben sind durch

$$\langle (x - x_0)^n \rangle = \begin{cases} \sigma^n (n-1)!!, & \text{n gerade} \\ 0, & \text{n ungerade} \end{cases} .$$

Berechnen Sie damit die ersten vier Momente und Kumulanten. Wobei $n!!$ die Doppelfakultät $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ ist.
Hinweis: Kumulanten lassen sich ähnlich zu Gl. (6) berechnen:

$$\kappa_n = \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n}{dk^n} \ln G(k) \bigg|_{k=0} ,$$

wobei κ_n die n-te Kumulante ist.

S **Aufgabe 9 (3 Punkte):** *Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Observablen*
Gegeben sei eine Verteilung $P(x)$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(f)$ einer Observablen $f(x)$ gegeben ist durch

$$P(f) = \langle \delta(f(x) - f) \rangle. \tag{7}$$

Zum Übungsbetrieb:
Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche **M** und schriftliche **S** Aufgaben. Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.