Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 2. November 2017
http://www.tu-berlin.de/?188671

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Arne Zantop (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 701)

3. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Do. 09.11.2017 im Tutorium (12:15 - 13:45 EW 731)

M **Aufgabe 10**: *Poisson-Verteilung als Grenzfall der Binomialverteilung*
Gegeben sei die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung der Binomialverteilung

$$P_{p,n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} . \tag{3.1}$$

Sie ist wie folgt zu verstehen; sei p die Erfolgswahrscheinlichkeit bei einem einzelnen Versuch eines Bernoulli-Prozesses einen Erfolg zu erzielen, dann ist $P_{p,n}(k)$ die Wahrscheinlichkeit, bei n unabhängigen Versuchen genau k Erfolge zu erzielen. Zeigen Sie, dass man für $\lambda \equiv pn = \langle k \rangle = \text{konst.}$ im Grenzfall $n \to \infty$ die Poisson-Verteilung erhält:

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} . \tag{3.2}$$

M **Aufgabe 11**: *Kontinuitätsgleichung*
Zeigen Sie, dass aus der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit im $6N$ dimensionalen Phasenraum eines Systems die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 , \tag{3.3}$$

folgt, mit der Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\mathbf{j} = \rho \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsströme zusammen mit einem kleinem Volumen im Phasenraum.

S **Aufgabe 12 (4 Punkte):** *Analogie zum Ehrenfest-Theorem*
Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Mittelwertes einer Observablen

$$\langle A \rangle = \int \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \, d\Gamma , \tag{3.4}$$

gegeben ist durch

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \langle \{A, H\} \rangle . \tag{3.5}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Liouville-Gleichung:

$$\dot{\rho} = -\{\rho, H\}$$

wobei $\{\cdot, \cdot\}$ die Poisson-Klammer, und H die Hamilton-Funktion, sind.

S **Aufgabe 13 (6 Punkte):** *Eindimensionales Gas*
Ein Ensemble aus Gasteilchen befinde sich zur Zeit $t = 0$ an einem Punkt $q = 0$ mit normalverteilten Impulsen, p:

$$\rho(q, p, t = 0) = \delta(q) f(p); \quad \text{mit} \quad f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \exp\left(-p^2/2mk_B T\right).$$

Für $t > 0$ dürfen sich die Teilchen in einer Dimension unter Einfluss eines konstanten Potentials $V(q) = V_0$ frei bewegen. Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Phasenraum-Dichte $\rho(q, p, t)$ und skizzieren sie diese in der (q, p) Ebene. Berechnen Sie $\langle p^2 \rangle$ und $\langle q^2 \rangle$.

S **Aufgabe 14 (5 Punkte): Bonusaufgabe:** *Antwortkoeffizienten*

(a) Zeigen Sie, dass

$$TdS = Nc_P dT - TV\alpha dP\ ,$$

mit dem thermischen Ausdehungskoeffizient α, der molare spezifischen Wärme bei konstantem Druck bzw. Volumen c_p, c_v und der isothermen Kompressibilität κ_T.

(b) Beweisen Sie damit die folgende Relation:

$$c_P = c_V + \frac{TV\alpha^2}{N\kappa_T}. \tag{3.6}$$

Zum Übungsbetrieb:
Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche **M** und schriftliche **S** Aufgaben. Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.