

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Arne Zantop (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 701)

5. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Do. 23.11.2017 im Tutorium (12:15 - 13:45 EW 731)

M **Aufgabe 18:** *Maxwell-Boltzmann-Verteilung*

Gegeben sei das Funktional

$$H[f] = \int f(\mathbf{p}, t) \ln f(\mathbf{p}, t) d^3p,$$

wobei, die (Verteilungs-)Funktion $f(\mathbf{p}, t)$ den Nebenbedingungen

$$\int f(\mathbf{p}, t) d^3p = n \quad \text{und} \quad \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} f(\mathbf{p}, t) d^3p = \bar{\epsilon} = \frac{3}{2}nk_{\text{B}}T$$

unterliegt.

- (a) Zeigen Sie, dass $H[f]$ minimal wird, wenn f die Form $\exp(-1 - \alpha - \beta \frac{p^2}{2m})$ annimmt. (mit α, β : Lagrangemultiplikatoren)
- (b) Bestimmen Sie α und β und zeigen Sie, dass f die Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist.

S **Aufgabe 19 (10 Punkte):** *Ehrenfest-Modell (5x2 Punkte)*

Gegeben seien 2 Hunde sowie $2R$ Flöhe, die zu Beginn ungleich auf die beiden Hunde verteilt sind. Die Flöhe springen zufällig zwischen den Hunden hin und her, so dass sich die Populationen im Laufe der Zeit angleicht und die mittlere Zahl der Flöhe auf beiden Hunden gleich wird. Dieses Modell nennt man Ehrenfest'sches Flohmodell.

Seien N_1 bzw. N_2 die Anzahl der Flöhe auf den jeweiligen Hunden 1 und 2, dann gilt $N_1 + N_2 = 2R$. Um das Angleichen der Population zu quantifizieren wählen wir als Observable k mit $2k = N_1 - N_2$. Im Ausgangszustand sei ein Zustand k mit der Wahrscheinlichkeit $P(k)$ gegeben. Alle τ Sekunden macht nun ein zufälliger der $2R$ Flöhe einen Sprung und wechselt dabei den Hund. Nach s Sprüngen ist also die Zeit $t = s\tau$ vergangen.

- (a) Zeigen Sie, dass die Übergangswahrscheinlichkeit für den Übergang vom Zustand k zum Zustand $k \pm 1$ gegeben ist durch

$$W_{k\pm 1, k} = \frac{R \mp k}{2R}.$$

- (b) Sei nun $P(k, s)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das System nach s Sprüngen im Zustand k ist. Zeigen Sie, dass:

$$P(k, s) = \frac{R + k + 1}{2R} P(k + 1, s - 1) + \frac{R - k + 1}{2R} P(k - 1, s - 1).$$

- (c) Zeigen Sie nun, dass für den Mittelwert von k gilt:

$$\langle k(s) \rangle = \left(1 - \frac{1}{R}\right)^s \langle k(0) \rangle,$$

und, dass im Grenzfall sehr vieler Flöhe im System $\langle k(t) \rangle \sim \langle k(0) \rangle e^{-\gamma t}$ mit $\gamma = (R\tau)^{-1}$ gilt.

- (d) Programmieren Sie eine Simulation des Modells. Plotten Sie $k(s)$ für eine typische Simulation mit der Anfangsbedingung $k = R$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit $\langle k(s) \rangle$ für $R = 5, 20, 100$.

5. Übung SP WS17

- (e) Verwenden Sie Ihre Simulation um die durchschnittliche Zeit zu bestimmen, die das System braucht um den Zustand $k = R$ zu erreichen, wenn die Anfangsbedingung $k = 0$ ist. Plotten Sie diese Durchschnittszeit als Funktion von R . Erläutern Sie den Zusammenhang mit dem H-Theorem und dem Loschmidt Paradoxon. **Hinweis:** Starten Sie mit kleinem R .

Zum Übungsbetrieb:

Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche **M** und schriftliche **S** Aufgaben. Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.