

Prof. Dr. Harald Engel
Jan F. Tutz, MSc

1. Übungsblatt – TP VI: Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Bis Mo. 06.11.2017 10:00 Uhr vor Beginn der Vorlesung im EW 203

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen.

Aufgabe 1 (20 Punkte): Thermokonvektion, Lorenz-Gleichungen

Aus den hydrodynamischen Gleichungen für die Konvektion einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeitsschicht (vgl. Vorlesung Kap. 1.2) leitete Edward Lorenz [J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963)] näherungsweise folgendes System aus drei gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen ab:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= -\sigma u + \sigma v \\ \frac{dv}{d\tau} &= -v + ru - vw \\ \frac{dw}{d\tau} &= -bw + vw\end{aligned}\tag{1}$$

Hier bezeichnen u , v , w die dimensionslosen Amplituden von Fourier-Moden, die proportional zur Konvektionsgeschwindigkeit, zur Temperaturdifferenz zwischen aufsteigender und absinkender Flüssigkeit bzw. zur Abweichung vom linearen Temperaturprofil des Wärmeleitungsregimes sind. Die Bedeutung der Parameter wird im Paper erörtert (S. 134-135).

- (1) Zeigen Sie, dass das Phasenvolumen für das Lorenz-System mit konstanter Rate $-(\sigma + b + 1)$ kontrahiert.
- (2) Bestimmen Sie die Fixpunkte des Lorenz-Systems und diskutieren Sie deren Stabilität bzgl. infinitesimal kleiner Störungen in Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter r .
- (3) Beweisen Sie folgende Behauptung: Der Lorenz-Attraktor wird im Phasenraum durch eine Kugel mit Mittelpunkt bei $(0, 0, r + \sigma)^T$ und Radius R (zunächst beliebig) umschlossen. Erläutern Sie die Bedeutung der Aussage in Bezug auf das Verhalten der Trajektorien im System.
- (4) Numerische Integration: Lorenz hat seine Gleichungen für $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28 > r_T = \frac{470}{19} = 24,74$ numerisch integriert. Plotten Sie die Fixpunkte $\{(0, 0, 0)^T, (\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)^T\}$ und genügend Trajektorien zur Visualisierung des Attraktors. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse sehr ausführlich. Verwenden Sie zur numerischen Integration entweder Mathematica oder C/C++ mit gnuplot und fügen Sie den Quellcode Ihrer Abgabe bei.

1. Übung WS 17/18

Vorlesung:

- Mo 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im EW 203.
- Mi 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.

Übung:

- Do 16:00 Uhr – 18:00 Uhr im EW 731.

Website:

- <http://www.tu-berlin.de/?188674>

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.
- Abgeschlossene Projektarbeit.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- A. S. Mikhailov, Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems (Springer)
- J. L. Klimontovich, Statistical Physics (Harwood Academic Publishers)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations (Wiley)
- G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in non-equilibrium systems (Wiley)
- J. D. Murray, Mathematical Biology I/II (Springer)
- A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Chaikin, Theorie der Schwingungen I/II (Akademie-Verlag)
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions (Springer)
- H. Haken, Synergetics. Introduction and Advanced Topics (Springer)
- Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos (Westview Press)