

Prof. Dr. Harald Engel  
Jan F. Tetz, MSc

## 2. Übungsblatt – TP VI: Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

**Abgabe: Bis Do. 30.11.2017 16:00 Uhr vor Beginn des Tutoriums im EW 731**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen.

### Aufgabe 2 (20 Punkte): Grenzzyklen

(a) Die van der Pol'sche Differentialgleichung lautet

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0. \quad (1)$$

Lösen Sie (1) numerisch für  $\alpha = 0.1$  ( $\rightarrow$  quasi-periodische Schwingungen) bzw.  $\alpha = 5$  ( $\rightarrow$  Kippschwingungen). Setzen Sie der Einfachheit halber  $\omega_0 = 1$ .

Stellen Sie die Lösung für geeignet gewählte Anfangsbedingungen graphisch als  $x(t)$  und  $\dot{x}(t) = dx(t)/dt := v(t)$  sowie als Trajektorien in der  $x$ - $v$ -Phasenebene dar.

(b) Gleichung (1) ist ein Sonderfall des dynamische Systems

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2x + \epsilon(u_1 - u_2v^2)v, \quad u_2 > 0. \quad (2)$$

Leiten Sie im schwach dissipativen Fall  $0 < \epsilon \ll 1$  unter Verwendung der Substitution

$$x(t) = \frac{A(t)}{\omega_0} \cos \psi(t), \quad v(t) = -A(t) \sin \psi(t), \quad \psi(t) := \omega_0 t + \varphi \quad (3)$$

die Gleichungen

$$\frac{dA}{dt} \approx \overline{\frac{dA}{dt}}^{T_0} = \epsilon \frac{A}{2} \left( u_1 - \frac{3}{4} u_2 A^2 \right), \quad \frac{d\varphi}{dt} \approx \overline{\frac{d\varphi}{dt}}^{T_0} = 0 \quad (4)$$

ab. Dabei bedeutet  $\overline{\quad}^{T_0}$  die Mittlung über eine Periode der schnellen oszillatorischen Bewegung mit  $1/\epsilon \gg T_0 = 2\pi/\omega \rightarrow$  Zeitskalentrennung.

(c) Die erste der beiden Gleichungen (4) besitzt die Lösung (beweisen)

$$A(t) = \frac{A_2^0}{\sqrt{1 + \frac{(A_2^0)^2 - A_0^2}{A_0^2} e^{-u_1 \epsilon (t-t_0)}}}, \quad A_2^0 = \sqrt{\frac{4u_1}{3u_2}}, \quad u_1 > 0, \quad A_0 = A(t_0) \quad (5)$$

Stellen Sie  $A(t)$  für  $A_0 > A_2^0$  und  $A_0 < A_2^0$  graphisch dar.

## 2. Übung WS 17/18

**Vorlesung:**

- Mo 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im EW 203.
- Mi 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.

**Übung:**

- Do 16:00 Uhr – 18:00 Uhr im EW 731.

**Website:**

- <http://www.tu-berlin.de/?188674>

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.
- Abgeschlossene Projektarbeit.

### Literatur zur Lehrveranstaltung:

- A. S. Mikhailov, Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems (Springer)
- J. L. Klimontovich, Statistical Physics (Harwood Academic Publishers)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations (Wiley)
- G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in non-equilibrium systems (Wiley)
- J. D. Murray, Mathematical Biology I/II (Springer)
- A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Chaikin, Theorie der Schwingungen I/II (Akademie-Verlag)
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions (Springer)
- H. Haken, Synergetics. Introduction and Advanced Topics (Springer)
- Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos (Westview Press)