Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 23.11.2017

Prof. Dr. Harald Engel
Jan F. Totz, MSc

3. Übungsblatt – TP VI: Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Bis Do. 07.12.2017 16:00 Uhr vor Beginn des Tutoriums im EW 731
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen.

Aufgabe 3 (8 Punkte): *Fraktale Dimension*
Der Sierpinski-Teppich ist durch folgenden Prozess gegeben: Man startet mit einem Quadrat. In jeder Iteration unterteilt man ein Flächenelement in 9 gleich Quadrate. Das mittlere Quadrat wird entfernt. Nun wird die Prozedur auf jedem neu erhaltenen Quadrat wiederholt.

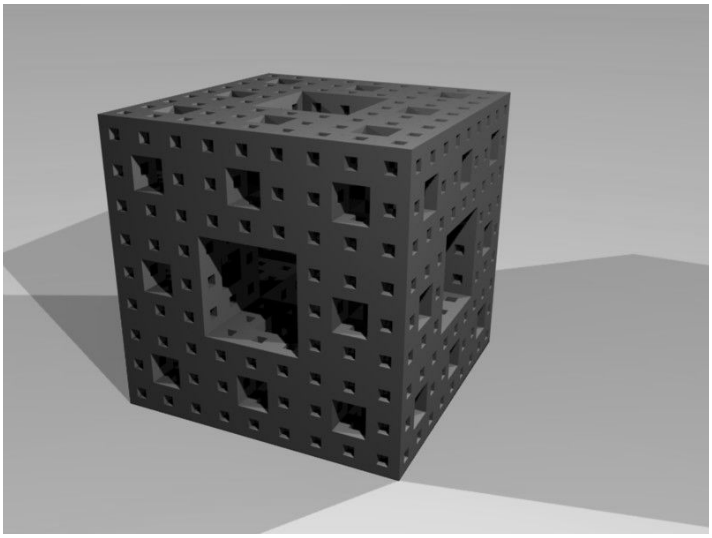

Abbildung 1: Dritte Iteration des Menger Schwamms. Auf seiner Oberfläche entspricht jede Seite dem Sierpinski-Teppich.

(a) Zeichnen Sie die ersten drei Iterationen des Sierpinski-Teppichs per Hand.

(b) Zeigen Sie, dass der Teppich keine Fläche besitzt.

(c) Bestimmen Sie seine fraktale Dimension analytisch.

(d) Wiederholen Sie die Prozedur in drei Dimensionen, durch Unterteilen eines Kubus und bestimmen Sie seine fraktale Dimension analytisch. Dieses Fraktal nennt sich Menger-Schwamm.

(e) Plotten Sie den Menger-Schwamm mit einem Programm Ihrer Wahl. Bis zu welcher Iteration n schaffen Sie es?

(f) (Bonus) Plotten Sie die Sierpinski-Pyramide bis zur mindestens 4. Iteration.

3. Übung WS 17/18

Aufgabe 4 (6 Punkte): *Korrelationsdimension des Lorenzattraktors*
Schreiben Sie ein Programm, um die Korrelationsdimension des Lorenzattraktors zu bestimmen. Verwenden Sie dabei die Standard-Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$,
$r = 28 > r_T = \frac{470}{19} = 24,74$. Tipp: Unter Mathematica enthält die Routine „NDSolve" die hilfreiche Methode „EventLocator". Alternativ können Sie sich orientieren an dem Vorgehen in der Veröffentlichung von Grassberger und Procaccia: Measuring the strangeness of chaotic attractors. Physica D **9**, 189 (1983).

Aufgabe 5 (6 Punkte): *Störungstheorie*
Die in der Vorlesung bei der Untersuchung der van der Pol'schen Gleichung verwendete Vorgehensweise ist ein Sonderfall der von Krylow und Bogoljubow entwickelten Methoden zur Berechnung asymptotischer Lösungen in der nichtlinearen Mechanik (vgl. N.N. Bogoljubow, J.A. Mitropolski, Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen, Akademie-Verlag, Berlin, 1965). Dabei sind die asymptotischen Lösungen für die Gleichung

$$\ddot{x} = \omega_0^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}),\ 0 < \epsilon \ll 1 \tag{1}$$

folgendermaßen aufgebaut:

$$x(t) = a\cos\psi + \epsilon u_1(a, \psi) + \epsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \tag{2}$$

wobei die $u_i(a, \psi)$ periodische Funktionen von $\psi = \omega_0 t + \varphi$ sind. Zeitabhängige Amplitude $a(t)$ und Phase $\psi(t)$ werden aus Gleichungen der Form

$$\dot{a} = \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \dots \tag{3}$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) + \dots \tag{4}$$

bestimmt. Dieser Lösungsansatz verhindert das Auftreten unbeschränkt mit der Zeit anwachsender, säkularer Terme in der Reihenentwicklung von $x(t)$ und ermöglicht die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Lösung. In der Übungsaufgabe sollen Sie sich davon überzeugen, dass Lösungsansätze der Form (Poisson)

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots + \epsilon^n x_n(t) + \dots \tag{5}$$

nur Näherungen für sehr kleine Zeiten t liefern können. (5) in (1) führt über Koeffizientenvergleich nach Potenzen von ϵ auf

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \tag{6}$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f(x_0, \dot{x}_0) \tag{7}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = f_x(x_0, \dot{x}_0)x_1 + f_{\dot{x}}(x_0, \dot{x}_0)\dot{x}_1 \tag{8}$$

(nachprüfen). Dieses Gleichungssystem kann iterativ gelöst werden. Bestimmen Sie die Lösung erster Ordnung Störungstheorie für das Beispiel

$$m\ddot{x} + \alpha x + \gamma x^3 = 0,\ 0 < \alpha, \gamma \ll 1 \tag{9}$$

Die Lösung $x(t)$ enthält neben einem harmonischen Term einen Term, der für $t \to \infty$ unbegrenzt anwächst. Solche säkularen Terme der Form $t^m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ und $t^m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ treten in allen Ordnungen der Störungstheorie auf. Deshalb gelten die entsprechenden Lösungen nur für kleine Zeiten t, aber auf keinen Fall asymptotisch für $t \to \infty$.
Zeigen Sie, dass eine zeitlich unbegrenzt anwachsende Lösung $x(t)$ im betrachteten Beispiel im Widerspruch zum Energieerhaltungssatz steht, da aus diesem $x^2(t) < 2E/\alpha$ für beliebige t folgt.