Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD
MSc. Rico Berner, Dr. Javier Cerrillo, Dr. Benjamin Lingnau

5. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 27.11.2017 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 11 (10 Punkte): *Operatoren in zweiter Quantisierung: Fermionische Operatoren*

Analog zu den bosonischen Kommutatorrelationen aus Aufgabe 7, betrachten wir nun fermionische Anti-Vertauschungsrelationen. In der zweiten Quantisierung werden für das Schrödingerfeld

$$\psi(\underline{r},t) = \sum_i \varphi_i(\underline{r}) a_i(t), \quad \psi^\dagger(\underline{r},t) = \sum_i \varphi_i^*(\underline{r}) a_i^+(t) \tag{1}$$

die nachfolgenden Vertauschungsrelationen eingeführt:

$$\{\psi(\underline{r},t), \psi^\dagger(\underline{r}\,',t)\} = \delta(\underline{r} - \underline{r}\,') \quad \text{Fermionen.} \tag{2}$$

Im Heisenberg-Bild wird die Zeitabhängigkeit von $\psi(\underline{r},t)$ von den Operatoren $a_i^+(t)$ getragen.

(a) Zeigen Sie explizit durch Einsetzen, dass die fermionische Anti-Vertauschungsrelationen $\{a_i, a_j^+\} = \delta_{i,j}$ erfüllt wird.

(b) Betrachten Sie den Mehrteilchenzustand $|\phi_n\rangle = \Pi_l (a_l^+)^{n_l} |\phi_0\rangle$, wobei $n_l \in \{0,1\}$ und $|\phi_0\rangle$ der fermionische Grundzustand ist. Zeigen Sie ferner, dass

$$\langle \phi_n | a_i^+ a_j | \phi_n \rangle = \begin{cases} 0 & , i \neq j, \\ n_i & , i = j, \end{cases} \tag{3}$$

gilt.

(c) Berechnen Sie nun auch für fermionische Operatoren a und a^+ mit $H_H = H_0$:

$$f(\alpha_i) \equiv U^\dagger a_i^+ U \tag{4}$$

unter Benutzung der fermionischen Anti-Vertauschungsrelationen in (a) und der Tatsache dass für fermionische Operatoren $(a^+)^n = a^n = 0$ $(n > 1)$ gilt. Bilden Sie analog zur Aufgabe 7c) eine Differentialgleichung für $f(\alpha_i)$.

Aufgabe 12 (5 Punkte): *2-Teilchen-Operator in zweiter Quantisierung*

Zeigen Sie folgende Form des 2-Teilchen-Operator in zweiter Quantisierung

$$\hat{H}_{12} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\lambda',\mu,\mu'} \langle \lambda'\mu' | V_{12} | \lambda\mu \rangle a_{\lambda'}^+ a_{\mu'}^+ a_\mu a_\lambda, \tag{5}$$

unter Verwendung von

$$\langle \lambda'\mu' | V_{12} | \lambda\mu \rangle = \int \mathrm{d}^3\underline{r}_1 \mathrm{d}^3\underline{r}_2\, \phi_{\lambda'}^*(\underline{r}_1) \phi_{\mu'}^*(\underline{r}_2) V_{12}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \phi_\lambda(\underline{r}_1) \phi_\mu(\underline{r}_2). \tag{6}$$

Aufgabe 13 (5 Punkte): *Hüpfende Elektronen*

Elektronen im Kristall, die nur schwach von den Rumpfatomen angezogen werden, können so beschrieben werden, als hüpfen sie von Gitterplatz zu Gitterplatz (der Gitterabstand a ist zur

Vereinfachung auf $a = 1$ gesetzt). Am gebräuchlichsten ist es, nur das Hüpfen zwischen nächsten Nachbarn zu betrachten. Der Hamiltonoperator lautet dann

$$\hat{H} = t \sum_j \left(a_{j+1}^+ a_j + a_j^+ a_{j+1} \right),$$

wobei j die Gitterplätze sind.

(a) Diagonalisieren Sie den gegebenen Hamiltonoperator mit Hilfe einer diskreten Fouriertransformation. Bringen Sie ihn auf die Form $\hat{H} = \sum_k \epsilon_k b_k^+ b_k$. Hierzu verwenden wir die Fermionoperatoren b_k der ebenen Wellen mit Impuls k, mit denen $a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{\imath k \cdot j} b_k$ gilt, wobei N die Anzahl der Gitterplätze ist. Wir benötigen die Relation $\sum_j e^{\imath (k-k')j} = N \delta_{k,k'}$.

(b) Wir können auch das Hüpfen zwischen übernächsten Nachbarn mitnehmen, indem wir schreiben

$$\hat{H} = t \sum_j \left(a_{j+1}^+ a_j + a_j^+ a_{j+1} \right) + t' \sum_j \left(a_{j+2}^+ a_j + a_j^+ a_{j+2} \right).$$

Wie ändert sich jetzt ϵ_k?

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Vorstellen einer Übungsaufgabe im Tutorium.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes.

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
08-10		EW 203		EW 203	
10-12					EW 114
12-14		EW 229			
14-16					
16-18				EW 226	

Sprechstunden			
ES	Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD	nach Vereinbarung	EW 735
RB	MSc. Rico Berner	**Di 14-15**	ER 245
JC	Dr. Javier Cerrillo	**Do 13-14**	EW 705
BL	Dr. Benjamin Lingnau	**Mi 13-14**	EW 629