

6. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 04.12.2017 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 14 (6 Punkte): Erwartungswert eines 2-Teilchenoperators

Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ eines fermionischen 2-Teilchenoperators gilt:

$$\langle \psi | a_{\lambda'}^{\dagger} a_{\mu'}^{\dagger} a_{\mu} a_{\lambda} | \psi \rangle = \langle a_{\mu'}^{\dagger} a_{\mu} \rangle \delta_{\mu' \mu} \langle a_{\lambda'}^{\dagger} a_{\lambda} \rangle \delta_{\lambda' \lambda} - \langle a_{\mu'}^{\dagger} a_{\lambda} \rangle \delta_{\mu' \lambda} \langle a_{\lambda'}^{\dagger} a_{\mu} \rangle \delta_{\lambda' \mu}.$$

wobei für die Wellenfunktion gilt: $|\psi\rangle = \prod_{\beta} \left(a_{\beta}^{\dagger}\right)^{n_{\beta}} (-1)^{N_{\beta}} |0\rangle$ mit $n_{\beta} = 0, 1$ und $N_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} n_{\alpha}$.

Aufgabe 15 (14 Punkte): Plasmonen

- (a) Stellen Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichung für $\langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},s}^{\dagger} a_{\mathbf{k},s} \rangle$ auf. Nutzen Sie dazu den Elektronengas-Hamiltonian in 2. Quantisierung:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \epsilon_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^{\dagger} a_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}, s_1, s_2} V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q},s_1}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q},s_2}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_2,s_2} a_{\mathbf{k}_1,s_1}.$$

- (b) Um das auftretende Hierarchieproblem (berechnete Erwartungswerte $\langle a^{\dagger} a \rangle$ koppeln an höhere Erwartungswerte $\langle a^{\dagger} a^{\dagger} a a \rangle$) zu lösen, führen Sie eine Hartree-Fock-Faktorisierung der 4er-Erwartungswerte durch.
- (c) Vernachlässigen Sie zusätzlich Spinkohärenzen ($\delta_{s,\lambda}$) und nehmen Sie nur Erwartungswerte mit, die elektronische Dichten ($\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{k}}^{ss} := \langle a_{\mathbf{k},s}^{\dagger} a_{\mathbf{k},s} \rangle$) und deren räumliche Fluktuationen ($\sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}}^{ss} := \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s}^{\dagger} a_{\mathbf{k},s} \rangle$) beschreiben. Damit erhält man folgende Bewegungsgleichung:

$$-i\hbar\partial_t \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}}^{ss} = (\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},s} - \epsilon_{\mathbf{k},s}) \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}}^{ss} + V_{\mathbf{Q}} (\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{k}}^{ss} - \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}-\mathbf{Q}}^{ss}) \sum_{\mathbf{k}_2,s'} \sigma_{\mathbf{k}_2-\mathbf{Q},\mathbf{k}_2}^{s's'} + \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} (\sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{ss} - \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q}+\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^{ss}) \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}}^{ss}.$$

Deuten Sie die einzelnen Terme.

- (d) Die Bewegungsgleichung aus (c) kann im Fourierraum analytisch gelöst werden:

$$1 = \frac{2V_{\mathbf{q}}}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\omega_{\text{Pl}}(\mathbf{q}) + \hbar^{-1}(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}})},$$

wobei es sich bei $f_{\mathbf{m}}$ um die elektronische Dichte,

$$(1) \quad f_{\mathbf{m}} = \frac{1}{e \frac{\epsilon_{\mathbf{m}} - \epsilon_F}{k_B T} + 1},$$

bei $\tilde{\epsilon}$ um die renormalisierte Einteilchenenergie und bei $V_{\mathbf{q}}$ um die Fouriertransformierte des Coulombpotentials handelt. Um sich dieses Ergebnis zu veranschaulichen, plotten Sie die rechte Seite der Bestimmungsgleichung für einen beliebigen aber festen Wert \mathbf{q} in Abhängigkeit von ω_{Pl} . Nehmen Sie dazu den eindimensionalen Spezialfall an und überführen Sie die Summe in ein Integral. Zusätzlich soll es sich im Nenner um die freien Teilchenenergien handeln ($\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k$). Wählen Sie für die Berechnung sinnvolle Werte für die Fermi-Energie ϵ_F und die Temperatur. Was bedeutet es also, die transzendente Gleichung zu lösen und welche Lösung ist die kollektive Schwingungsmode?

6. Übung TPV WS17/18

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Vorstellen einer Übungsaufgabe im Tutorium.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes.

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
08-10		EW 203		EW 203	
10-12					EW 114
12-14		EW 229			
14-16					
16-18				EW 226	

Sprechstunden			
ES	Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD	nach Vereinbarung	EW 735
RB	MSc. Rico Berner	Di 14-15	ER 245
JC	Dr. Javier Cerrillo	Do 13-14	EW 705
BL	Dr. Benjamin Lingnau	Mi 13-14	EW 629