Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

17. Dezember 2018

8. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Montag 14.01.19 vor der Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Bewegungsgleichungen*

Der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit ist gegeben durch

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\rho + p}{c^2} u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta},$$

wobei ρ die Energiedichte, p den Druck und u^α die Vierergeschwindigkeit der Materie bezeichnet. Es gilt $u^\alpha u_\alpha = c^2$.

Zeigen Sie, dass die Gleichung $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ der Geodätengleichung entspricht, wenn der Druckgradient $p_{,\beta}(g^{\alpha\beta} - \frac{u^\alpha u^\beta}{c^2})$ als äußere Kraftdichte interpretiert wird. Beachten Sie, dass Energiedichte und Druck orts- und zeitabhängig sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Feldgleichungen*

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}) + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

den Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}$$

äquivalent ist. Hier gelten die üblichen Bezeichnungen und Λ ist die kosmologische Konstante.

b) Wie lauten die Vakuum-Feldgleichungen im Fall einer verschwindenden kosmologischen Konstante?

c) Berechnen Sie den Ricci-Skalar für das elektromagnetische Feld dessen Energie-Impuls-Tensor definiert ist durch

$$T^\beta{}_\gamma := \frac{c}{4\pi}(F^{\beta\alpha} F_{\alpha\gamma} + \frac{1}{4}\delta^\beta_\gamma F^{\alpha\lambda} F_{\alpha\lambda})$$

im Fall einer verschwindenden kosmologischen Konstante.