Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

3. Dezember 2018

7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Montag 17.12.18 vor der Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte): *Die Symmetrien des Krümmungstensors*

Aus den Christoffelsymbolen und deren partiellen Ableitungen wird der Riemannsche Krümmungstensor definiert durch

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} = 0.$$

Benutzen Sie dabei die Symmetrie der Christoffelsymbole.
b) Zeigen Sie die Symmetrie $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$.
Es ist auch hilfreich an den ersten Übungszettel zu denken.

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Bianchi Identitäten*

Zusätzlich zu den oben beschriebenen algebraischen Identitäten des Krümmungstensors (1) existiert im Riemannschen Raum die Differentialidentität

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta;\sigma]} = 0 \tag{2}$$

für den Krümmungstensor, die sogenannte Bianchi Identität.
a) Zeigen Sie, dass Gleichung (2) gilt. Es ist recht unangenehm dies durch schlichtes Ausrechnen zu zeigen - aber machbar. Einfach ist dies zu zeigen, wenn man lokal geodätische Koordinaten benutzt. Wenn diese benutzt werden, hätte ich dazu aber gerne eine kurze Erklärung.
b) Leiten Sie aus Gleichung (2) die sogenannte kontrahierte Bianchi Identität

$$(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0$$

ab. Hier bezeichnen $R_{\alpha\beta} := R_{\gamma\alpha\delta\beta}g^{\gamma\delta} = R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta}$ den Ricci-Tensor und $R := R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = R^{\alpha}{}_{\alpha}$ den Ricci-Skalar.

Aufgabe 3 (2 Punkte): *Weyl-Tensor*

Man wird sich bald Fragen wo eigentlich die Krümmung herkommt wenn man an die Lösung der Vakuumfeldgleichungen denkt. Hierzu ist es sinnvoll den Weyl-Tensor C_{abcd} zu betrachten der definiert ist als

$$C^{ab}{}_{cd} = R^{ab}{}_{cd} - 2g^{[a}{}_{[c}R^{b]}{}_{d]} + \frac{R}{3}g^{a}{}_{[c}g^{b}{}_{d]}. \tag{3}$$

(Ricci-Tensor und Ricci-Skalar sind wie oben definiert.) Dieser Weyl-Tensor „erbt“ die Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors, darüber hinaus aber eine weitere.
a) Zeigen Sie, dass der Tensor spurfrei ist, d.h. $C^{ab}{}_{ad} = 0$ gilt.
b) Maximal wieviele unabhängige Komponenten besitzt der Weyl-Tensor im dreidimensionalen Raum und wieviele im vierdimensionalen Raum? Es ist hier hilfreich an die Komponenten des Krümmungstensors und des Ricci-Tensors zu denken.