Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 20. Dezember 2018

Prof. Dr. Gernot Schaller
Dr. Dirk Kulawiak, Dr. Jérôme Burelbach, Alexander Kraft, Philip Knospe, Philipp Stammer

# 10. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik

**Abgabe: Mo. 14.01.2019 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

**Aufgabe 28 (8 Punkte):** *Maxwell-Gleichungen in Vierer-Schreibweise*
Rechnen Sie nach, dass die Vierer-Schreibweise der Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{1}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\partial^\beta F^{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$$

mit dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, der Viererstromdichte $j^\mu$ und dem Epsilon-Tensor $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$

(a) für Gleichung (1) den inhomogenen Maxwellgleichungen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ entspricht.

(b) für Gleichung (2) den homogenen Maxwellgleichungen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ entspricht.

**Aufgabe 29 (5 Punkte):** *Lagrangeformalismus und relativistische Teilchen*
Gegeben sei die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{r}}{c}\right)^2} - q\,\Phi + q\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ die relativistische Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld liefert.

(b) Zeigen Sie, dass die Wirkung $S = \int dt\,\mathcal{L}$ Lorentz-invariant ist, indem Sie sie durch Vierer-Größen und Lorentz-Skalare ausdrücken.

**Aufgabe 30 (7 Punkte):** Kramers-Kronig-*Relationen*
Das Absorptionsverhalten eines Materials sei durch den Imaginärteil der komplexen dielektrischen Funktion gegeben als

(a) $\epsilon''(\omega) = \sin\omega$,

(b) $\epsilon''(\omega) = \Theta(\omega - \omega_1) - \Theta(\omega - \omega_2)$, mit $\omega_1 < \omega_2$.

Hierbei ist $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion. Berechnen Sie mit Hilfe der Kramers-Kronig-Relation

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{\omega}\, \frac{\epsilon''(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega}$$

($\mathcal{P}\int$ bezeichnet den Hauptwert des Integrals) den Realteil der dielektrischen Funktion. Stellen Sie anschließend $\epsilon'(\omega)$ und $\epsilon''(\omega)$ als Funktion von $\omega$ graphisch dar.

*Hinweise:*

10. Übung TPIII WS 18/19

- Führen Sie das Hauptwertintegral auf ein Integral der Form

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)-f(-x)}{x}$$

zurück, und verwenden Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\sin(cx)}{x} = \frac{\pi\,\mathrm{sgn}(c)}{2}.$$

- Unterscheiden Sie in (b) die drei Fälle $\omega < \omega_1$, $\omega_1 < \omega < \omega_2$, und $\omega_2 < \omega$ zur Auswertung der auftretenden Integrale.

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
  *Ab dem zweiten Übungsblatt werden Einzel- und Zweierabgaben nicht mehr akzeptiert!*
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

| **Sprechstunden** | | |
|---|---|---|
| Prof. Dr. Gernot Schaller | EW 744 | Di, 13-14 Uhr |
| Dr. Dirk Kulawiak | EW 627 | Di, 14-15 Uhr |
| Dr. Jérôme Burelbach | EW 708 | Mi, 11-12 Uhr |
| Alexander Kraft | EW 269 | Mi, 15-16 Uhr |
| Philip Knospe | EW 060 | Mi, 16-17 Uhr |
| Philipp Stammer | EW 060 | Fr, 14-15 Uhr |