

Prof. Dr. Gernot Schaller

Dr. Dirk Kulawiak, Dr. Jérôme Burelbach, Alexander Kraft, Philip Knospe, Philipp Stammer

**3. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik****Abgabe: Mo. 12.11.2018 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude****Aufgabe 7 (7 Punkte): Multipole**

Betrachten Sie die Multipol-Entwicklungen der folgenden Ladungsverteilungen:

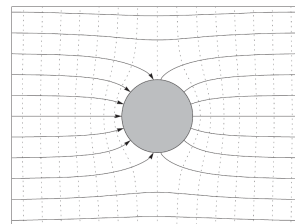
- (a) An zwei Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks in der  $x$ - $y$  Ebene (Seitenlänge  $d$ ) befinden sich Punktladungen der Größe  $q$ . Am dritten Eckpunkt befindet sich eine Punktladung der Größe  $-q$ . Bestimmen Sie Monopol- und Dipolmoment dieser Ladungsanordnung.
- (b) Auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoids mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  sei die Ladung  $q$  homogen verteilt. Bestimmen Sie den Quadrupoltensor  $Q_{kl}$ , zeigen Sie, dass dieser nur einen unabhängigen Eintrag  $Q := Q_{33}$  besitzt, und berechnen Sie  $Q$ .

*Hinweis:* Ein Punkt  $\underline{r}'$  auf der Oberfläche eines im Ursprung zentrierten Rotationsellipsoids erfüllt

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z'}{b}\right)^2 = 1.$$

**Aufgabe 8 (8 Punkte): Leitende Kugel im homogenen elektrischen Feld**

Eine ungeladene Metallkugel im Ursprung mit dem Radius  $R$  befindet sich in einem homogenen elektrischen Feld  $\underline{E} = (0, 0, E_0)^T$ . Gesucht ist das elektrostatische Potential  $\phi(\underline{r})$ .



- (a) Um die Symmetrie der Kugel nutzen zu können, begeben wir uns in Kugelkoordinaten. Stellen Sie zunächst das zu dem externen elektrischen Feld gehörige Potential  $\phi_{\text{ex}}(\underline{r})$  in kartesischen und Kugelkoordinaten dar. Wählen Sie  $\vartheta = \angle(\underline{r}, \underline{e}_z)$ .
- (b) Finden Sie die korrekten Randbedingungen für  $\phi(\underline{r})$
- (i) am Rand der Kugel  $r = R$ ,
  - (ii) unendlich weit weg von der Kugel, für  $r \rightarrow \infty$ .
- (c) Durch das in  $z$ -Richtung zeigende elektrische Feld ist das Problem zylindersymmetrisch. Die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten mit dieser Symmetrie lässt sich mit dem folgenden Ansatz lösen:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( a_{\ell} r^{\ell} + b_{\ell} r^{-(\ell+1)} \right) P_{\ell}(\cos \vartheta) \quad (1)$$

$$P_0(\cos \vartheta) = 1$$

$$P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$$

$$P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

...

Hierbei sind  $P_{\ell}$  die Legendre-Polynome. Nutzen Sie die in (b) gefundenen Randbedingungen, um die Konstanten in (1) zu bestimmen (*Hinweis:* Koeffizientenvergleich). Berechnen Sie  $\phi(\underline{r})$  und  $\underline{E}(\underline{r})$ .

**Bitte Rückseite beachten! →**

3. Übung TPIII WS 18/19

(d) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte  $\sigma$ .

(e) Bestimmen Sie das durch diese Oberflächenladung induzierte Dipolmoment  $\underline{p}$ .

*Hinweis:* Vergleichen Sie das elektrische Feld mit der aus der Vorlesung bekannten Multipolentwicklung.

**Aufgabe 9 (5 Punkte): Poisson Gleichung für das Elektrische Potential**

Benutzen sie die Poisson Gleichung:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (2)$$

um das elektrische Potential  $\phi$  für folgende Ladungsdichten  $\rho$  zu bestimmen. Bestimmen Sie auch die dabei auftretenden Konstanten.

a)  $\rho(\mathbf{r})$  ist gleichmäßig verteilt innerhalb einer Kugel mit Radius  $R$ :

b)  $\rho(\mathbf{r})$  ist gleichmäßig verteilt auf einer Kugeloberfläche mit Radius  $R$ .

c)  $\rho(\mathbf{r})$  ist gleichmäßig verteilt auf einer unendlich ausgedehnten Zylinderoberfläche mit Radius  $R$ .

**Hinweis:** Benutzen Sie ein Koordinatensystem das zu der Geometrie von  $\rho(\mathbf{r})$  passt.

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).  
*Ab dem zweiten Übungsblatt werden Einzel- und Zweierabgaben nicht mehr akzeptiert!*
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
Prof. Dr. Gernot Schaller	EW 744	Di, 13-14 Uhr
Dr. Dirk Kulawiak	EW 627	Di, 14-15 Uhr
Dr. Jérôme Burelbach	EW 708	Mi, 14-15 Uhr
Alexander Kraft	EW 269	Mi, 15-16 Uhr
Philip Knospe	EW 060	Mi, 16-17 Uhr
Philipp Stammer	EW 060	Fr, 14-15 Uhr