8.2 Die Grundstruktur der Quantentheorie

Die Information über ein physikalisches System (wir beziehen uns im Folgenden auf quantenphysikalische Systeme) wird durch Vektoren eines Hilbertraums repräsentiert. Dieser Hilbertraum ist der Zustandsraum der Quantentheorie. Für die Zustandsvektoren gilt das **Superpositionsprinzip**, die additive Überlagerung von Zustandsvektoren.

Messoperationen, beispielsweise Impulsmessung, Ortsmessung, Drehimpulsmessung werden durch **selbstadjungierte lineare Operatoren** repräsentiert. Sie werden als „**Observable**" bezeichnet.
Ihr Definitionsbereich liegt „dicht" im Hilbertraum. (Jeder Hilbertraumvektor lässt sich als Limes einer konvergenten Folge von Elementen erhalten, die im Definitionsbereich des in Frage kommenden Operators liegen.)

Ein Operator A* heißt adjungiert zum Operator A, wenn

$\langle A^*\psi , \varphi \rangle = \langle \psi , A\varphi \rangle$ für alle Hilbertraumvektoren ψ, φ aus dem Definitionsbereich von A.

Ein Operator A heißt selbstadjungiert, falls

$$A^* = A$$

Adjunktion bedeutet bei einer Matrix das Transponieren („Spiegelung“ der Elemente der Matrix an der Hauptdiagonale) und Übergang zum komplex Konjugierten.

Viele Operatoren lassen sich bezüglich einer ausgewählten Basis des Hilbertraums als Matrizen darstellen. (Eine Basis im Hilbertraum ist eine Untermenge von Elementen, durch deren Kombination jedes beliebige Element des Hilbertraums approximiert werden kann.)

Physikalisch hat die Adjunktion mit Zeitumkehr zu tun. In den dynamischen Gleichungen der Quantenmechanik tritt die Zeitvariable t in Kombination mit der imaginären Einheit i auf. Aus $i \cdot t$ wird dann $-i \cdot t$.

Die Menge der beschränkten selbstadjungierten linearen Operatoren auf dem Hilbertraum bilden mit der Hintereinanderausführung der Anwendung auf einen Vektor eine **nichtkommutative Algebra, die Observablenalgebra**.

Der Erwartungswert (Messwert) eines Operators A in einem System, das sich im Zustand ψ befindet, wird durch das folgende Skalarprodukt definiert:

(36) $\langle \psi , A \psi \rangle$

Selbstadjungierte Operatoren haben reelles Spektrum. Ihr Erwartungswert ist entsprechend eine reelle Zahl.

Die beschränkten linearen Operatoren $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ bilden mit der Adjunktion eine involutive Algebra (*-Algebra).

Eine Verallgemeinerung der Matrixalgebra ist das Konzept einer **von Neumann-Algebra**, ein für die Quantentheorie kräftiges mathematisches Werkzeug [59].

Eine von Neumann Algebra $\mathcal{M}$ ist eine *-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, falls

(37) $\quad \mathcal{M} = \mathcal{M}''$

Die Kommutante $\mathcal{A}'$ einer Untermenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist die Menge der Operatoren (und ihrer Adjungierten) aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, die mit allen Operatoren aus $\mathcal{A}$ vertauschen. Die Grundlage der Definition einer von Neumann-Algebra ist die erstaunliche Beobachtung $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'''$. Mit $\mathcal{M} = \mathcal{A}'$ gilt dann (37). Der tragende Rahmen dieses mathematischen Zugangs ist das Spiel von Nichtvertauschbarkeit und Vertauschbarkeit.

[59] Artikel Nr. 430 zum Stichwort "Von Neumann Algebras" in "Encyclopedic Dictionary of Mathematics" by the Mathematical Society of Japan, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1977. Eine knappe und präzise Darstellung.

Spezialliteratur: Masamichi Takesaki: "Theory of Operator Algebras", Springer-Verlag, New York, Volume I, 1979; Volume II, 2003. Jacques Dixmier: "Von Neumann Algebras", North-Holland, Amsterdam, 1969.

Die Struktur einer von Neumann-Algebra lässt sich abstrakt, ohne Bezug zu einem Hilbertraum definieren. Diese abstrakte Algebra heißt W*-Algebra. Umgekehrt lässt sich mittels einer Standardkonstruktion aus der abstrakten W*-Algebra eine von Neumann-Algebra über einem Hilbertraum gewinnen.

Wir betrachten eine abstrakte W*-Algebra und wählen uns eine maximal abelsche (bei der Multiplikation vertauschen alle Operatoren) W*-Unteralgebra. Zu dieser Unteralgebra lässt sich kanonisch ein Raum konstruieren. Eine abelsche Operatorenalgebra beschreibt klassische Physik. Passenderweise hält sie einen Raumbegriff bereit.

Bezogen auf die raum-zeitliche Ebene der klassischen Physik findet die quantentheoretische Beschreibung auf einer „Meta-Ebene“ statt. Auf dieser Meta-Ebene ist die **Dynamik der ψ-Funktion**, wie sie beispielsweise durch die Schrödinger-Gleichung bestimmt wird, **deterministisch**!

Für einen geeigneten Vektor ψ des Hilbertraums $\mathcal{H}$ einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ lässt sich eine modulare Konjugation S_ψ definieren, welche die Nichtkommutativität der Algebra „misst".

(38) $\quad S_\psi : \quad x\psi \;\rightarrow\; x^*\psi \qquad$ für alle $x \in \mathcal{M}$

$$S_\psi\,(x \cdot y)\,\psi \;=\; (x \cdot y)^*\psi \;=\; (y^* \cdot x^*)\,\psi$$

Für selbstadjungierte $x, y \in \mathcal{M}$, $x^* = x$, $y^* = y$, vertauscht S_ψ die Reihenfolge der Faktoren im Operatorenprodukt:

$$S_\psi\,(x \cdot y)\,\psi \;=\; (y \cdot x)\,\psi$$

Die „polare" Zerlegung der modularen Konjugation S_ψ ergibt einen modularen, positiven Operator Δ_ψ und eine antiunitäre Involution J_ψ (ähnlich wie bei der Zerlegung einer komplexen Zahl in Radialteil r und imaginären Winkelteil, $z = e^{i\varphi} \cdot r$):

(39) $\quad S_\psi \;=\; J_\psi\,\Delta_\psi{}^{1/2}.$

Es gilt: $\quad S_\psi{}^* \cdot S_\psi = \;\Delta_\psi$.

Die hier vorgestellte Mathematik wurde ab der 1960er Jahre durch die japanischen Mathematiker M. Tomita und M. Takesaki initiiert, und international weiterentwickelt. Diese Tomita-Takesaki-Theorie wurde beispielsweise für das Modell eines idealen Quantengases im thermischen Gleichgewicht eingesetzt. Der Energieoperator H des Systems (Hamiltonoperator) beschreibt das zeitliche Verhalten des Gases. Zugleich erzeugt der Logarithmus des modularen Operators eine Dynamik des Systems. Im thermischen Gleichgewicht ψ besteht zwischen beiden Operatoren die folgende Beziehung:

(40) $$H = -kT \log \Delta\psi$$

Damit haben wir einen Zusammenhang zwischen der Wärmebewegung im Quantengas und der Nichtkommutativität des Systems! Wärmebewegung wird offenbar auf Quantenfluktuationen zurückgeführt. Die Temperatur ist die Proportionalitätskonstante zwischen Quantenfluktuationen und Wärmebewegung.