

Prof. Sabine Klapp

Dr. Alexander Carmele, Dr. Javier Cerrillo, Malte Selig

2. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II**Abgabe: Do. 08.11.2018 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude***Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.***Aufgabe 4 (8 Punkte): Klein-Gordon-Theorie des Atoms (2.5+3+2.5=8 Punkte)**Untersuchen Sie das Spektrum eines Atoms der Kernladungszahl Z im Rahmen der Klein-Gordon-Theorie.

- (a) Bringen Sie dazu die Klein-Gordon-Gleichung für ein geladenes relativistisches Teilchen in einem Coulomb-Potential ($\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $q\Phi(r) = -\frac{Z\alpha}{r}\hbar c$) mit Hilfe eines Separation-Ansatzes für stationäre Lösungen mit positiver Energie auf die Form

$$(1) \quad \left[\left(E + Z\alpha \frac{\hbar c}{r} \right)^2 + (m_0 c^2)^2 \lambda^2 \frac{d^2}{dr^2} - \ell(\ell+1)(m_0 c^2)^2 \frac{\lambda^2}{r^2} - (m_0 c^2)^2 \right] R(r) = 0.$$

Hier ist $\alpha \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante und $\lambda = \hbar/(m_0 c)$ die Compton-Wellenlänge.

- (b) Vergleichen Sie das Eigenwertproblem (1) mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass das Spektrum durch

$$(2) \quad E_{n'}^2 = \frac{(m_0 c^2)^2}{1 + Z^2 \alpha^2 / n'^2}$$

bestimmt ist. Hier ist $n' \in \mathbb{Z}^+$.

- (c) Entwickeln Sie die Eigenenergien $E_{n'}$ bis zur vierten Ordnung in $Z\alpha$. Beachten Sie dabei, dass n' über das entsprechende ℓ' von $Z\alpha$ abhängt.

Aufgabe 5 (8 Punkte): Pauli-MatrizenDie drei Pauli-Matrizen, σ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$), sind unitär, hermitesch und erfüllen die Gleichung $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i \mathbb{1}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen die Kommutator-Relation, $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k$, und die Antikommutator-Relation, $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$, erfüllen.
- (b) Zeigen Sie damit, dass $\sigma_i \sigma_j = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{1}$ gilt.
- (c) Zeigen Sie damit nun folgende Identität:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbb{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Hier ist $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ein Vektor mit den drei Pauli-Matrizen als Einträge und $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ sind Vektoren mit drei Skalaren als Einträge.

- (d) Bei dem Tensorprodukt von zwei Matrizen gilt

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

Prüfen Sie $[\sigma_i \otimes \sigma_j, \mathbb{1} \otimes \sigma_k] = \sigma_i \otimes [\sigma_j, \sigma_k]$.

2. Übung TPV WS1819

Aufgabe 6 (4 Punkte): Erhaltungsgößen in der Dirac-Theorie

Der Dirac-Hamiltonian eines freien Teilchens ist $\hat{H} = c \sum_{k=1}^3 \hat{\alpha}^k \hat{p}_k + \hat{\beta} m_0 c^2$, wobei $\hat{\alpha}_k = \sigma_1 \otimes \sigma_k$ und $\hat{\beta} = \sigma_3 \otimes \mathbb{1}$. Die Komponenten des Spinoperators $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ sind durch $\hat{S}_k = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \mathbb{1} \otimes \sigma_k$ gegeben.

- Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ nicht mit \hat{H} vertauscht. Nutzen Sie dafür die Vertauschungsrelationen des Orts- und Impulsoperators.
- Zeigen Sie, dass der Spinoperator ebenfalls nicht mit \hat{H} vertauscht.
- Zeigen Sie schließlich, dass jedoch der Gesamtdrehimpuls $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ mit \hat{H} vertauscht.

Vorlesung: Di. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 203,
Do. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und **aktive** Teilnahme in den Übungen.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik (Springer)
- U. Scherz, Quantenmechanik (Teubner)
- F. Schwabl, Quantenmechanik für Fortgeschrittene (Springer)
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie (Aula-Verlag)
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 7: Vielteilchentheorie (Springer)