Prof. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Dr. Javier Cerrillo, Malte Selig

3. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 15.11.2018 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 7 (12 Punkte): *Reflexion und Transmission an einer Potentialschwelle*
Berechnen Sie den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten an einer Potentialschwelle $e\phi(z) = V_0\Theta(z)$ nach der zeitunabhängigen Dirac-Gleichung

$$H_D|\Psi(\mathbf{r},t)\rangle = E|\Psi(\mathbf{r},t)\rangle \tag{1}$$

mit dem Dirac-Operator $H_D = H_D^0 + e\phi$ und dem freien Anteil $H_D^0 = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}m_e c^2$. überlegen Sie sich hierzu zunächst geeignete Lösungsansätze für $z < 0$ und $z > 0$. Nutzen Sie, dass alle Komponenten der Spinoren stetig sind. Betrachen und diskutieren Sie die Reflexion und Transmission für die Fälle

(i) $E - V_0 > mc^2$,

(ii) $|E - V_0| < mc^2$ und

(iii) für das sogenannte Klein'sche Paradoxon mit $E - V_0 < -mc^2$.

Aufgabe 8 (8 Punkte): *Zitterbewegung*

Bei einer einzigen räumlichen Dimension lässt sich die Dirac-Gleichung in der Form ($\hbar = c = 1$)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-i\,\sigma_1\frac{\partial}{\partial x} + \sigma_3\,m\right)\psi(x,t) = H\psi(x,t) \tag{2}$$

schreiben. Hier sind σ_1 und σ_3 Pauli-Matrizen, m ist die Masse des Teilchens und $\psi(x,t)$ ist ein zwei-komponentiger Spinor.

(a) Leiten Sie die Dirac-Gleichung (2) her, indem Sie analog vorgehen wie in der Vorlesung für $(3+1)$ Dimensionen.

(b) Leiten Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für Operatoren $\hat{x}$ und σ_1 her

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{x} = \sigma_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_1 = 2i\left(\hat{p} - \sigma_1 H\right). \tag{4}$$

(c) Finden Sie die Lösung zum Heisenbergschen Ortsoperator

$$\hat{x}(t) = \hat{x} + v_{cl}\left(\hat{p}\right)t + \hat{Z}(t), \tag{5}$$

und geben Sie die Form der Operatoren $v_{cl}(\hat{p})$ und $\hat{Z}(t)$ an.

(d) Welche Form hat $v_{cl}(\hat{p})$ im nicht-relativistischen Fall?

(e) Finden Sie eine Anfangsbedingung bei der der Term $\hat{Z}(t)$ nicht zu $\langle\hat{x}\rangle(t)$ beiträgt und außerdem, eine bei der $v_{cl}(\hat{p})$ nicht zu $\langle\hat{x}\rangle(t)$ beiträgt. Was bedeutet das physikalisch?