Prof. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Dr. Javier Cerrillo, Malte Selig

5. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 29.11.2018 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 11 (20 Punkte): *Zweiteilchenzustände und Eigenwertprobleme*

Betrachten Sie den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ des Zwei-Spin-Systems. $|i\rangle_k \in \mathcal{H}_k, k \in \{1,2\}$ ist dabei die Basis der Spin-Einteilchen-Wellenfunktion des k-ten Einteilchen-Hilbertraums und $i \in \{1/2 \equiv\uparrow, -1/2 \equiv\downarrow\}$. D.h. für $|i\rangle_k$ gelten die bekannten Eigenwertgleichungen $\hat{S}_k^z|i\rangle_k = \hbar m_{k,i}|i\rangle_k, m_{k,i} \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ und $\hat{\mathbf{S}}_k^2|i\rangle_k = \frac{3}{4}\hbar^2|i\rangle_k$. Wir entwickeln den Zwei-Teilchen-Zustand $|\phi\rangle$ nach den Einteilchenfunktionen $|\phi\rangle = \sum_{i,j} a_{i,j}|i\rangle_1|j\rangle_2,\ i,j \in \{\uparrow,\downarrow\}$. Und wir definieren einen neuen Operator $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$.

1. Spinleiteroperatoren (4 Punkte)
   Der Spin-Leiteroperator ist definiert durch $\hat{S}_k^\pm = \hat{S}_k^x \pm i\hat{S}_k^y$. Zeigen Sie dessen Wirkung auf die Einteilchenbasis $|i\rangle_k$:
   $$\hat{S}_k^\pm|i\rangle_k = f_{k,i}^\pm|i \pm 1\rangle_k \text{ mit } f_{k,i}^\pm = \hbar\sqrt{\frac{3}{4} - m_{k,i}(m_{k,i} \pm 1)}.$$
   Tipps: Betrachten Sie dazu das Konstrukt $\hat{S}_k^z\hat{S}_k^\pm|i\rangle_k$, verwenden Sie eine geeignete Kommutatorrelation (nur hier wird die explizite Definition des Leiteroperators gebraucht) sowie Normierungseigenschaft.
   Hinweis: Wegen Drehimpulseigenschaften gilt, $[\hat{S}_k^l, \hat{S}_k^m] = i\hbar\epsilon_{l,m,n}\hat{S}_k^n, \quad l,m,n \in x,y,z.$

2. Zweiteilchenoperator und Zweiteilchenzustand (9 Punkte)
   (a) Berechnen Sie nun die Wirkung des neuen Operators $\hat{\mathbf{S}}^z$ auf den Zustand $|i\rangle_1|j\rangle_2$.
   (b) Berechnen Sie die folgende Wirkung des neuen Operators $\hat{\mathbf{S}}^2$ auf den Zustand $|i\rangle_1|j\rangle_2$:
   $$\hat{\mathbf{S}}^2|i\rangle_1|j\rangle_2 = \hbar^2(\frac{3}{2}+2m_{1,i}m_{2,j})|i\rangle_1|j\rangle_2+f_{1,i}^+\cdot f_{2,j}^-|i+1\rangle_1|j-1\rangle_2+f_{1,i}^-\cdot f_{2,j}^+|i-1\rangle_1|j+1\rangle_2.$$
   Hinweis: Benutzen Sie u.a. die Spin-Leiteroperatoren.
   (c) Kann der Zustand $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ die Wellenfunktion von einem ununterscheidbaren Teilchen sein?

Bitte wenden.

3. Neue Zweiteilchenbasis (7 Punkte)
Wir suchen jetzt eine neue Zweiteilchenbasis $|S, M_S\rangle$, die die neuen Operatoren $\hat{\mathbf{S}}^z$ und $\hat{\mathbf{S}}^2$ als Eigenfunktonen haben. Dabei sind S, M_S zwei neue Quantenzahlen, anstelle von den zwei alten Quantenzahlen $m_{1,i}, m_{2,i} \in \{\pm\frac{1}{2}\}$.

   (a) Erklären Sie kurz den Zusammenhang zwischen den neuen und alten Quantenzahlen.

   (b) Schreiben Sie die folgenden vier Zweiteilchenzustände in der neuen Zweiteilchenbasis auf: i) $|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$, ii)$|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$, iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 + |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2)$, iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 - |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2)$. Welche nennt man davon Triplett- welche Singulettzustände und warum? Welche Zustände davon sind symmetrisch, welche antisymmetrisch?

   (c) Zeigen Sie nun unter Benutzung der vorhergehenden Ergebnisse, dass die Funktionen i)-iv) Eigenfunktionen von $\hat{\mathbf{S}}^z$ und $\hat{\mathbf{S}}^2$ sind.
   Wie lautet dann das Eigenwertproblem von $\hat{\mathbf{S}}^z|S, M_S\rangle$ und $\hat{\mathbf{S}}^2|S, M_S\rangle$?

   (d) Erklären Sie kurz, was man unter „guten“ Quantenzahlen versteht.