Prof. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Dr. Javier Cerrillo, Malte Selig

6. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 06.12.2018 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 12 (20 Punkte): *Clebsch-Gordan Koeffizienten*

Betrachten Sie den Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$. Um aus dem Produktraum in den Gesamtdrehimpulsraum zu gelangen, bedarf es Entwicklungskoeffizienten. Diese ergeben sich über die Vollständigkeitsrelation als:

$$|j_1, j_2; J, M\rangle = \sum_{m_{j1}, m_{j2}}^{m_{j1}+m_{j2}=M} |j_1, j_2; m_{j1}, m_{j2}\rangle \langle j_1, j_2; m_{j1}, m_{j2}|j_1, j_2; J, M\rangle \,,$$

wobei $\langle j_1, j_2; m_{j1}, m_{j2}|j_1, j_2; J, M\rangle$ Clebsch-Gordan Koeffizienten genannt werden und $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ und $M = m_{j1} + m_{j2}$ gilt. Zur Abkürzung wird nun $|j_1, j_2; J, M\rangle \equiv |J, M\rangle$ und $|j_1, j_2; m_{j1}, m_{j2}\rangle \equiv |m_{j1}, m_{j2}\rangle$ geschrieben.

(a) Betrachten Sie allgemein:

1. Wieviele Zustände im Produktraum gibt es, wenn j_1 und j_2 vorgegeben sind?
2. Warum gilt $|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_2\rangle$?
3. Leiten Sie $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}|j_1 - 1, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}|j_1, j_2 - 1\rangle$ her, indem Sie J_- und die Normierungsbedingung verwenden.
4. Was ergibt sich hieraus für den Clebsch-Gordan Koeffizient $\langle m_{j1}, m_{j2}|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$?
5. Berechnen Sie den Clebsch-Gordan Koeffizienten $\langle m_{j1}, m_{j2}|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 2\rangle$.

(b) Verifizieren Sie nun konkret für den Gesamtdrehimpuls eines Elektrons $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ mit $l > 0$ den Ausdruck:

$$|l, 1/2; l + 1/2, M\rangle = \sqrt{\frac{l + M + 1/2}{2l + 1}}|l, 1/2; M - 1/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{l - M + 1/2}{2l + 1}}|l, 1/2; M + 1/2, -1/2\rangle.$$

Gehen Sie dafür wie folgt vor:

1. Verifizieren Sie zuerst den Ausdruck mit den hergeleiteten Formeln (a-e) für den Fall $J = l + 1/2, M = l + 1/2$ und $J = l + 1/2, M = l - 1/2$.
2. Schließen Sie daraus, dass der Ausdruck für M korrekt ist und zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass dies auch der Fall für $M - 1$ ist.