Prof. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Dr. Javier Cerrillo, Malte Selig

# 9. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

**Abgabe: Do. 10.01.2019 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**
*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.*

**Aufgabe 16 (6 Punkte):** *Kommutatorrelation von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren*

Zeigen Sie die Kommutatorrelation von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren

$$\left[\hat{a}_\beta, \hat{a}^\dagger_\gamma\right]_\mp = \hat{a}_\beta \hat{a}^\dagger_\gamma \mp \hat{a}^\dagger_\gamma \hat{a}_\beta = \delta_{\beta,\gamma}.$$

Betrachten Sie dazu die Wirkung des Operators auf einen beliebigen symmetrischen / antisymmetrischen $N$-Teilchenzustand $|\phi_{\alpha_1}...\phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)}$. In der Vorlesung wurde die Wirkung des Erzeugungsoperators auf einen beliebigen symmetrischen / antisymmetrischen $N$-Teilchenzustand gezeigt:

$$\hat{a}^\dagger_\gamma |\phi_{\alpha_1}...\phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)} = \sqrt{N+1}|\phi_\gamma \phi_{\alpha_1}...\phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)}.$$

Zeigen Sie zunächst auch die Wirkung des Vernichtungsoperators auf einen beliebigen symmetrischen / antisymmetrischen $N$-Teilchenzustand,

$$\begin{aligned}\hat{a}_\beta |\phi_{\alpha_1}...\phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \Big(\delta_{\beta,\alpha_1}|\phi_{\alpha_2}...\phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)}\ (\pm)^1 \delta_{\beta,\alpha_2}|\phi_{\alpha_1}\phi_{\alpha_3}...\phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)} \\ +...+ \\ (\pm)^{N-1}\delta_{\beta,\alpha_N}|\phi_{\alpha_1}...\phi_{\alpha_{N-1}}\rangle^{(\pm)}\Big),\end{aligned}$$

und schließen Sie dann auf die Vertauschungsrelation.

**Aufgabe 17 (10 Punkte):** *Zweiteilchenoperatoren in Zweiter Quantisierung*

Zeigen Sie, dass für Zweiteilchenoperatoren in zweiter Quantisierung gilt:

$$\hat{H}_2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \hat{V}_2^{(i,j)} = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2} \langle \phi^{(1)}_{\alpha_1}\phi^{(2)}_{\alpha_2}|\hat{V}_2^{(1,2)}|\phi^{(1)}_{\beta_1}\phi^{(2)}_{\beta_2}\rangle \hat{a}^\dagger_{\alpha_1}\hat{a}^\dagger_{\alpha_2}\hat{a}_{\beta_2}\hat{a}_{\beta_1}.$$

Dabei bezeichnen die $|\phi^{(i)}_{\alpha_i}\rangle$ Einteilchenzustände des $i$-ten Teilchens. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Zeigen Sie zunächst, dass sich der Zweiteilchenoperator schreiben lässt als

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha_1...\alpha_N} \sum_{\beta_1...\beta_N} {}^{(\pm)}\langle \phi_{\alpha_1}...\phi_{\alpha_N}|\hat{H}_2|\phi_{\beta_1}...\phi_{\beta_N}\rangle^{(\pm)} \hat{a}^\dagger_{\alpha_1}...\hat{a}^\dagger_{\alpha_N}|0\rangle\langle 0|\hat{a}_{\beta_N}...\hat{a}_{\beta_1}.$$

  Hier bezeichnet $|0\rangle\langle 0|$ den Projektor auf den Vakuumzustand.

- Vereinfachen Sie nun das Matrixelement ${}^{(\pm)}\langle \phi_{\alpha_1}...\phi_{\alpha_N}|\hat{H}_2|\phi_{\beta_1}...\phi_{\beta_N}\rangle^{(\pm)}$, indem Sie die in den $N$-Teilchenzuständen auftauchende Permutation explizit auswerten.

- Um die Summation über die Teilchenindizes $i, j$ auszuwerten, zeigen Sie, dass alle Beiträge $i, j$ identisch sind.

9. Übung TPV WS1819

**Aufgabe 18 (4 Punkte):** *Dynamik des Vernichtungsoperators*

Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{\beta} \epsilon_{\beta} \hat{a}_{\beta}^{\dagger} \hat{a}_{\beta}.$$

Berechnen Sie die Bewegungsgleichung für den Vernichtungsoperator $\hat{a}_{\alpha}$ unter Benutzung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung $i\hbar\partial_t \hat{O} = [\hat{O}, \hat{H}]_-$. Betrachten Sie dabei den Fall von fermionischen als auch von bosonischen Operatoren $\hat{a}_{\alpha}$. *Achtung: Egal ob Fermion oder Boson, in der Heisenberg-Gleichung steht immer der Kommutator.*