Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Jan F. Totz

4. Übungsblatt – TP VI: Statistische Physik des Gleichgewichts

Abgabe: Bis Fr. 5.12.2018 14:00 Uhr im EW 731

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen.

Aufgabe 6 (20 Punkte): *Kuramoto-Synchronisationsübergang*

Betrachten Sie N global gekoppelte Phasenoszillatoren, deren Dynamik gegeben ist durch

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin\left(\phi_j - \phi_i\right) .$$

Hier beschreibt ϕ_i die Phase und ω_i die Eigenfrequenz des i-ten Oszillators. Die Kopplungsstärke K moduliert den globalen Wechselwirkungsterm.

(a) Simulieren Sie den Kuramoto-Synchronisationsübergang für eine gaußförmige Frequenzverteilung mit $N = 100$ Knoten. Führen Sie dafür eine Reihe von Simulationen für verschiedene Werte von K durch und plotten Sie den Betrag des Kuramoto-Ordnungsparameters,

$$R = \frac{1}{N}\left|\sum_{j=1}^{N} e^{\mathrm{i}\phi_j}\right| .$$

Stimmt der numerisch bestimmte Wert für die kritische Kopplungsstärke mit dem theoretischen überein? Welche Ordnung besitzt der Phasenübergang? Diskutieren Sie eventuelle Abweichungen vom erwarteten Verhalten.

(b) Betrachten Sie im Folgenden global gekoppelte Phasenoszillatoren mit bimodaler Frequenzverteilung

$$g(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi}\left(\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\Delta^2} + \frac{1}{(\omega+\omega_0)^2+\Delta^2}\right) .$$

Verwenden Sie den Ott-Antonsen Ansatz um die Dynamik des Systems auf zwei gekoppelte komplexe Differentialgleichungen zu reduzieren, in der beide Unterpopulationen durch einen eigenen Ordnungsparameter beschrieben werden:

$$\frac{dz_1}{dt} = -(\Delta + i\omega_0)z_1 + \frac{K}{4}\left(z_1 + z_2 - \left(z_1^* + z_2^*\right) z_1^2\right) ,$$
$$\frac{dz_2}{dt} = -(\Delta + i\omega_0)z_2 + \frac{K}{4}\left(z_1 + z_2 - \left(z_1^* + z_2^*\right) z_2^2\right) .$$

Der Stern steht für komplexe Konjugation.

(c) Unter der Annahme, dass sich die Beträge der Ordnungsparameter identisch verhalten, $|z_1| = |z_2| = \rho$, zeigen Sie dass sich das 4-dimensionale dynamische System aus b) weiter vereinfachen lässt zu:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{K}{4}\rho\left(1 - \frac{4\Delta}{K} - \rho^2 + \left(1-\rho^2\right)\cos\psi\right) ,$$
$$\frac{d\psi}{dt} = 2\omega_0 - \frac{K}{2}\left(1+\rho^2\right)\sin\psi .$$

Hierbei ist $\psi = \arg z_1 - \arg z_2$ die Phasendifferenz der Ordnungsparameter.

(d) Verifzieren Sie durch geeignete numerische Simulationen Abbildung 7 aus der Veröffentlichung von Martens et al. “Exact results for the Kuramoto model with a bimodal frequency distribution”, Phys. Rev. E 79, 026204 (2009). Wie viele verschiedene Übergangsszenarien für festes ω_0 können Sie finden? Welche Ordnungen haben die jeweiligen Phasenübergänge?

Vorlesung:	• Di 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202 • Do 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 202
Übung:	• Mi 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 731
Website:	• http://www.tu-berlin.de/?198939
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte • Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium • Abgeschlossene Projektarbeit