

VL: Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD  
 UE: Dr. Anna Zakharova

## 4. Übungsblatt zur Theor. Physik VI: Nichtgleichgewichtsstatistik

**Abgabe:** Mi 28.11.2018. Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in 3er Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

### Aufgabe 9 (20 Punkte): Stochastic Resonance

Consider a two-state model of stochastic resonance in which position  $x$  takes on discrete values  $x_+$  and  $x_-$  with probabilities  $p(x = x_{\pm}) = n_{\pm}$  such that  $n_+ + n_- = 1$ , as defined in the paper [McNamara and Wiesenfeld, PRA **39**, 4854 (1989)]. The dynamics can be described by the master equation

$$\frac{dn_+}{dt} = -\frac{dn_-}{dt} = W_-(t)n_- - W_+(t)n_+ = W_-(t) - [W_+(t) + W_-(t)]n_+$$

with  $W_{\pm}(t)$  the transition rate out of state  $x_{\pm}$ . For this rate we employ Kramers' rate for a periodically driven barrier:  $W_{\pm}(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{1}{D}(U_0 \pm U_1 \cos \Omega t)\right]$ .

1. Expand the rates as  $W_{\pm}(t) \approx \frac{1}{2}(\alpha_0 \mp \alpha_1 \eta_0 \cos \Omega t)$  for small driving amplitude,  $\eta_0 = U_1/D \ll 1$ , and identify parameters  $\alpha_0$  and  $\alpha_1$ .
2. To first order in  $\eta_0$ , show that the solution of the rate equation is

$$n_+(t|x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left[ \exp[-\alpha_0(t - t_0)] \left( 2n_+(t_0) - 1 - \frac{\alpha_1 \eta_0 \cos(\Omega t_0 - \phi)}{\sqrt{\alpha_0^2 + \Omega^2}} \right) + 1 + \frac{\alpha_1 \eta_0 \cos(\Omega t - \phi)}{\sqrt{\alpha_0^2 + \Omega^2}} \right]$$

with phase  $\phi = \arctan \Omega/\alpha_0$ .

3. Show that, in the asymptotic limit  $t_0 \rightarrow \infty$ , we have  $\langle x(t) \rangle = \bar{x}(D) \cos(\Omega t - \phi)$ , and identify  $\bar{x}(D)$  in terms of Kramers rate parameters. Assume a symmetric system  $x_{\pm} = \pm 1$  and take the probability distribution function to be  $p(x) = n_+ \delta(x - x_+) + n_- \delta(x - x_-)$ .
4. In the limit  $t_0 \rightarrow -\infty$ , the autocorrelation function reads

$$\langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle = \exp(-\alpha_0|\tau|) \left( 1 - \frac{\alpha_1^2 \eta_0^2 \cos^2(\Omega t - \phi)}{\alpha_0^2 + \Omega^2} \right) + \frac{\alpha_1^2 \eta_0^2 [\cos(\Omega t) + \cos(\Omega(2t + \tau) + 2\phi)]}{2(\alpha_0^2 + \Omega^2)}$$

Calculate the power spectrum  $S(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) \overline{\langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle}$  of the initial phase-averaged autocorrelation function

$$\overline{\langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle} = \Omega/(2\pi) \int_0^{2\pi/\Omega} dt \langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle.$$

5. Determine the signal-to-noise ratio, SNR (see lecture notes for definition).
6. Sketch  $\bar{x}(D)$  and the SNR as a function of noise strength  $D$  and discuss. Find the value of  $D$  which optimizes the SNR. Is this the same value that optimizes  $\bar{x}(D)$ ?

#### 4. Übung TPVI WS18/19

**Vorlesung:**

- Donnerstag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Freitag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.

**Übung:**

- Mittwoch, 16:15 – 17:45 Uhr im EW 114.

**Anmeldung:** Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung “Theoretische Physik VI: Nichtgleichgewichtsstatistik” erfolgt über das Moseskontosystem: <https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto>.

**Webseiten:**

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter: [https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws\\_201819/wahlpflichtveranstaltungen/theoretische\\_physik\\_vi\\_vertiefung\\_statistische\\_physik\\_des\\_nichtgleichgewichts/](https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/theoretische_physik_vi_vertiefung_statistische_physik_des_nichtgleichgewichts/)
- Visualisierung gibt es unter: [http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/nichtlineare\\_dynamik](http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/nichtlineare_dynamik)

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der vorletzten Vorlesungswoche).
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.

**Kontakte:**

- Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, [schoell@physik.tu-berlin.de](mailto:schoell@physik.tu-berlin.de), Sprechzeiten nach Vereinbarung.
- Dr. Anna Zakharova, ER 244, 314-28948, [anna.zakharova@tu-berlin.de](mailto:anna.zakharova@tu-berlin.de), Sprechzeiten Do. 13:00-14:00