Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Mohsen Kahdem, Arne Zantop, Robert Salzwedel, Isaac Tesfaye, Jonah Friederich, Lasse Ermoneit

9. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Di. 08.01.2019 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte die Matrikelnummern auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. **Sonst keine Bewertung!**

Aufgabe 20 (4 Punkte): *Wiederholung aus der Vorlesung: Hamiltonsche Gleichungen*

Betrachten Sie die Legendre-Transformation der Lagrangefunktion

$$H = \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L.$$

(a) Von welchen Variablen hängen L und H ab?

(b) Definieren Sie die generalisierten Impulse p_j und leiten Sie die Hamiltonschen Gleichungen her.

(c) Geben Sie Anzahl und Ordnung der Euler-Lagrange-Gleichungen und der Hamiltonschen Gleichungen an.

Aufgabe 21 (8 Punkte): *Mathematisches Pendel: Euler-Lagrange vs. Hamilton-Gleichungen*

Leiten Sie die Bewegungsgleichung des Polarwinkels φ mithilfe von Euler-Lagrange und im Hamilton-Formalismus für das ebene Pendel unter Einwirkung der Gravitationskraft $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{e}}_z$ her. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(a) Geben Sie zunächst die Lagrangefunktion $L = T - V$ (unter Annahme einer festen Fadenlänge) in ebenen Polarkoordinaten an. Nähern Sie das Gravitationspotential in diesen Koordinaten für kleine Auslenkungen des Pendels (Taylor 2. Ordnung).

(b) Leiten Sie mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung und der genäherten Lagrangefunktion die Bewegungsgleichung für φ ab.

(c) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ aus obiger Lagrangefunktion und diskutieren Sie diese Größe im Vergleich zum mechanischem Impuls $p^{mech} = m|\dot{r}|$.

(d) Berechnen Sie nun die Hamiltonfunktion $H(\varphi, p_\varphi, t) = \dot{\varphi}\, p_\varphi - L$ und wenden Sie die Hamiltonschen Gleichungen an. Zeigen Sie, dass dieses Verfahren auf das Resultat **(b)** führt.

Aufgabe 22 (8 Punkte): *Elektrische und magnetische Dipolnäherung als kanonische Transformation*

In der Vorlesung wurde die Dipolnäherung für ein gebundenes Teilchen eingeführt. Wir gehen von der Lagrangefunktion der minimalen Kopplung aus:

$$L \; = \; \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V_0(\mathbf{r}) - q\phi(\mathbf{r}, t) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Wir verwenden die Erzeugende in Dipolnäherung:

$$R(\mathbf{r}, t) = -q\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(0, t) - \frac{q}{2}\mathbf{r} \cdot \left[(\mathbf{r} \cdot \nabla) \left.\right|_{\mathbf{r}=0} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right].$$

(a) Zeigen Sie, dass sich L mittels der Erzeugenden R transformieren läßt auf:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V_0(\mathbf{r}) - q\phi(\mathbf{r},t) + q\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - q\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(0,t) - q\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{A}}(0,t) \\ &\quad -\frac{q}{2}\dot{\mathbf{r}}\cdot[(\mathbf{r}\cdot\nabla)|_{r=0}A(\mathbf{r},t)] - \frac{q}{2}\mathbf{r}\cdot[(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)|_{r=0}A(\mathbf{r},t)] - \frac{q}{2}\mathbf{r}\cdot\left[(\mathbf{r}\cdot\nabla)|_{r=0}\dot{A}(\mathbf{r},t)\right] \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie zunächst:

$$\frac{q}{2}\dot{\mathbf{r}}\cdot[(\mathbf{r}\cdot\nabla)|_{r=0}A(\mathbf{r},t)] - \frac{q}{2}\mathbf{r}\cdot[(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)|_{r=0}A(\mathbf{r},t)] = \frac{q}{2}(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\cdot(\nabla\times\mathbf{A}(0,t))$$

(c) Begründen Sie warum der Term

$$-\frac{q}{2}\mathbf{r}\cdot\left[(\mathbf{r}\cdot\nabla)|_{r=0}\dot{A}(\mathbf{r},t)\right] \approx 0$$

vernachlässigt werden kann, wenn man sich auf Dipolterme beschränkt.

(d) Zeigen Sie, dass damit L' dargestellt werden kann als:

$$L' = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \tilde{V}_0(\mathbf{r}) + q\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(0,t) + \frac{q}{2}\left(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right)\cdot\mathbf{B}(0,t).$$

Bestimmen Sie $\tilde{V}_0$ und kommentieren Sie welcher Term der elektrischen und welcher Term der magnetischen Dipolwechselwirkung zuzuordnen ist.