# III Kanonischer Formalismus

## 1. Was wir bisher nicht bedacht haben ...

mit Newtonscher Theorie ein komplettes Werkzeug f. Mechanik
aber, moderne Sprache der Theorie unterscheidet sich davon, weil
man Formulierungen verbessern kann:

a) Bewegungsgleichungen sollen für allen Koordinaten gelten:

Kartesisch: $m\ddot{x}_i = f_i$ , Polar: $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f_r$

sehr unterschiedlich! oft krummlinige KS kompliziert...

b) einfache Art, geometrische Nebenbedingung bzw
zugehörige Zwangskräfte einzubauen:
- Zwangskraft die Beweg. auf Tisch erzwingt, $f_z^{Zwg} = mg$
- Fadenpendel: $\ell$ = konstant

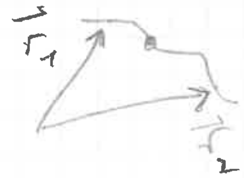
c) Schritte zur Quantenmechanik vorbereiten
(nicht vertauschbare Operatoren identifizieren, konjugierte Variable)

d) Formalismus soll auch f. Felder aufbereitet werden.

## 2. Prinzip kleinster Wirkung u. Euler-Lagrange-Technik

Teilchen und Felder in moderner Sprache

### 2.1 Eine komplizierte Ableitung der Newtongleichung – das Prinzip kleinster Wirkung




Teilchen im Potential $V(\vec r)$: $m\ddot{\vec r} = -\vec\nabla V(\vec r)$

Newtongl. kann kompliziert aus Prinzip kleinster Wirkung (o. Hamilton-prinzip) abgeleitet werden, Schritte (a–d):

a) Einführung der Lagrangefunktion $L = T - V = L(\vec r, \dot{\vec r})$

b) Aufschreiben der Wirkungsfunktion $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec r(t), \dot{\vec r}(t))$

c) Auffinden der $\vec r_0(t)$ das
S an Gruppe aller mögl. $\vec r(t)$ zwischen $\vec r_1$ und $\vec r_2$ extremal macht:

$$S = \underbrace{\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} dt \underbrace{\left(\frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2} - V(\vec r)\right)}_{a}}_{b} = \underbrace{\text{extremal}}_{c}\,(\vec r_0(t))$$

d) An den Endpunkten $\vec r(t_1), \vec r(t_2)$ fest, d.h. $\delta r(t_1), \delta r(t_2) = 0$.


mögl. Bahn — zwischen $\vec r_1, \vec r_2$

wahre Bahn --- zwischen $\vec r_1, \vec r_2$

für „wahre" Bahn wird $S$ extremal

„$S(\vec r)$ ist Funktional von $\vec r(t)$"

## Wie wird Extremum von $S(\vec r(t))$ $S(\vec r_0(t))$ gefunden?

**Funktion $f(x)$**, Extrem suche als Funktion von $x$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x)\Big|_{x_0} \underbrace{(x-x_0)}_{\delta x}}_{\delta f(\delta x, x_0) = 0} = f(x_0) \qquad (1.\ \text{Ableitg.} = 0)$$

**Funktional $S(\vec r)$**

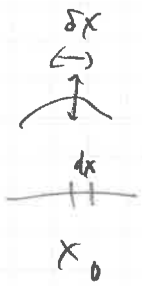
$$S(\vec r) = S(\vec r_0) + \underbrace{\delta S(\delta \vec r, \vec r_0)}_{=0} = S(\vec r_0(t))$$

„1. Variation von $S$ bezüglich $\vec r$ soll verschwinden"

**Analogie**

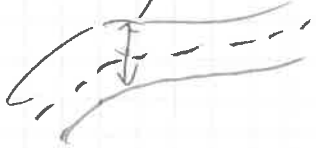
$x \to \vec r(t)$, $\quad f(x) \to S(\vec r(t))$ $\hat{=}$ Übergang von Differentialrechnung zur Variationsrechnung

$x = x_0 + \delta x \qquad \vec r(t) = \vec r_0(t) + \underbrace{\delta \vec r(t)}_{\text{Variation einer Funktion}}$





$\delta r(t) = f(r(t))$



$\delta f(x) \overset{!}{=} 0$, wenn mit $\delta x$ gewackelt wird

$\delta S = 0$, wenn mit $\delta \vec r$ gewackelt wird

$\delta S = 0$ gefordert!

Ableitg. d. Newtongleichg.:

$$\vec r(t) = \vec r_0(t) + \delta \vec r(t) \quad \text{mit} \quad S(\vec r_0) \equiv S_0 \quad \text{und}$$

$$\delta S(\vec r_0) \equiv S(\vec r) - S_0$$

Einsetzen in PKW:

$$S(\vec r) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{\vec r}^2(t) + V(\vec r(t)) \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} (\dot{\vec r}_0 + \delta \dot{\vec r})^2 + V(\vec r_0 + \delta \vec r) \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} (\dot{\vec r}_0^2 + 2 \dot{\vec r}_0 \cdot \delta \dot{\vec r} + \delta \dot{\vec r}^2) - V(\vec r_0) + \delta \vec r \cdot \vec\nabla_0 V(\vec r_0) + \dots \right)$$

Beschränkg auf kleine Variation bzgl. $\vec r_0$, analog $x_0$ bei $f(x)$:

$$S = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{\vec r}_0^2 - V(\vec r_0) \right)}_{S_0} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left( m \dot{\vec r}_0 \cdot \delta \dot{\vec r} - \vec\nabla_0 V(\vec r_0) \cdot \delta \vec r \right)}_{\delta S}$$

$$\rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( m \dot{\vec r}_0 \cdot \delta \dot{\vec r} - \vec\nabla_0 V(\vec r_0) \cdot \delta \vec r \right)$$

verwende Trick: $\int_{t_1}^{t_2} dt \; m \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec r}_0(t) \cdot \delta \vec r(t) \right) = m \left( \dot{\vec r}_0(t_2) \underbrace{\delta \vec r(t_2)}_{=0} - \dot{\vec r}_0(t_1) \underbrace{\delta \vec r(t_1)}_{=0} \right)$

Variation am Rand = 0

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( m \dot{\vec r}_0 \cdot \delta \dot{\vec r} - m \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec r}_0 \cdot \delta \vec r \right) - \vec\nabla_0 V(\vec r_0) \, \delta \vec r \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( - m \ddot{\vec r}_0 - \vec\nabla_0 V(\vec r_0) \right) \cdot \delta \vec r \overset{!}{=} 0$$

Klammer ist Null, weil
$0 \neq \delta \vec r$ unabhängig variiert werden kann: $m \ddot{\vec r}_0 = - \vec\nabla_0 V(\vec r_0)$

damit ist das Newtongesetz aus Variationsprinzip abgeleitet $(\vec r_0 \to \vec r)$.

## 2.2 Euler-Lagrange Gleichung f. Teilchen

allgemeine Darstellung in beliebigen Koordinaten $\{q_i\}$, $i = 1,2,3$

z.B. $\{x_i\}$, $\{r, \vartheta, \varphi\}$, ... wählen:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i) - V(q_i, t)$$

etwas allgemeinere Form; Zeitabhängigkeit des Potentials zulassen.

Prinzip extremaler Wirkung sollte nun auch die Gl. f. beliebige Koord. $q_i$ erzeugen.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = \Big| q_i(t) \to q_i^0(t) + \delta q_i(t) \Big|$$

$$= \underbrace{\int dt \{L(q_i^0, \dot{q}_i^0, t)}_{S_0} + \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^0} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^0} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \underset{0}{\underset{\parallel}{\delta t}} \right) \}$$

$$\delta S = 0 = \sum_i \int dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^0} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^0} \delta \dot{q}_i \right), \quad \text{wieder Trick verwenden:}$$

$$= \sum_i \int dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^0} \delta q_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^0} \delta q_i \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^0} \delta \dot{q}_i \right)$$

$$= \sum_i \int dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i^0$$

solange die $\delta q_i$ linear unabhängig sind (keine weiteren Nebenbedingungen) folgt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i^0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^0} = 0$$

Bei bekannter Lagrangefunktion $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ lauten die

Euler-Lagrange-Gl.: $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (*).

Bemerkungen:

a) (*) werden Lagrange-Gl. 2. Art genannt (1. Art kommt noch)
gelten in beliebigen Koordinatensystemen

b) Verhalten erzeugen:

freies T.: $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow m\ddot{x} = 0$ ✓

harmon. Osz.: $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$ ✓

c) Impuls definiert: $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$,

wenn $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ für bestimmte $q_i$, so nennt man $q_i$ zyklisch

und $\dfrac{d}{dt} p_i = 0$, d.h. $p_i$ ist eine Erhaltungsgröße

d) Energieerhaltung: $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, totale Zeitableitung berechnen:

$$\frac{d}{dt}L = \partial_t L + \sum_i \Big( \dot{q}_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\text{LG}} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big)$$

$$= \partial_t L + \sum_i \Big( \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big)$$

$$= \partial_t L + \frac{d}{dt}\Big( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) \Rightarrow -\partial_t L = \frac{d}{dt}\Big( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \Big)$$

mit Def.: $H = \sum_i \dot{q} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$ (Hamiltonfunktion H) folgt:

$\dfrac{d}{dt} H = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$ Wenn L nicht zeitabhängig ist,
so ist H erhalten.

d) H ist die Energie: da L in allen Koordinaten gilt wähle wir kartesische

$$T = \sum_i \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 \quad , \quad V = V(x_i, t)$$

$$H = \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \sum_i \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x_i, t)$$

$$= \sum_i \left( m \dot{x}_i^2 - \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 \right) + V(x_i, t)$$

$$= T + V \text{ , also Energie.}$$

e) weil bei Ableitg. der Lagrangegl. 2. Art an "i" keine Einschränkung gemacht wurde gilt die Gleichg. auch für viele Massenpunkte $i = \underbrace{1,2,3}_{\substack{\text{1. Teilch:} \\ x,y\,z}} , \underbrace{4,5,6}_{\substack{\text{2. Teilch:} \\ x,y,z}} \dots$ usw.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$ Lagrangegl. 2. Art f. Massepunktsystem

## 2.3. Beispiel f. Lagrangegl. 2. Art

a) Keplerproblem (ÜA 15)

$m$

$$L = T - V \qquad \text{fest. Sonne } (M) \quad \text{in } \vec e_r, \vec e_\vartheta, \vec e_\varphi :$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2} + \frac{GMm}{r} \qquad \vec r = r\vec e_r$$

$$\dot{\vec r} = \dot r \vec e_r + r\dot\vartheta \vec e_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot\varphi\,\vec e_\varphi$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2\right) + \frac{GMm}{r}$$

Lagrange 2. Art: $\displaystyle \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad q_i = \{r, \vartheta, \varphi\}$

in ÜA berechnen

Bsp.: $\displaystyle \frac{\partial L}{\partial r} = m r\dot\vartheta^2 + m r\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 - \frac{GmM}{r^2} \; ; \; p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = m r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2 \; ; \; p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} = m r^2\dot\vartheta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \;, \; p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m r^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi = \text{konstant}$$

Energie: $\displaystyle E = H = \sum_i \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L$

$$= \dot r\, m\dot r + \dot\varphi\, m r^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi + \dot\vartheta\, m r^2\dot\vartheta$$

$$- \frac{m}{2}\dot r^2 - \frac{m r^2}{2}\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 - \frac{m}{2}r^2\dot\vartheta^2 + V_G$$

$$= \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{m r^2}{2}\sin^2\vartheta\,\dot\varphi + \frac{m}{2}r^2\dot\vartheta^2 + V_G$$

ÜA: $p_\varphi$ könnte Drehimpuls sein $L_z$ ⊥ Bewegungsebene sein, L liegt senkrecht von geb.
Trick: $L_z$ über bekannte Formeln nachvollziehen

$$L_z = m\,\vec r \times \vec p = m\,(x\dot y - \dot x y) = \quad \left|\ \begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \end{aligned}\right.$$

$$= r\sin\vartheta\cos\varphi\,(\dot r\sin\vartheta\sin\varphi + r\cos\vartheta\,\dot\vartheta\sin\varphi + r\sin\vartheta\cos\varphi\,\dot\varphi)$$

$$- r\sin\vartheta\sin\varphi\,(\dot r\sin\vartheta\cos\varphi + r\cos\vartheta\,\dot\vartheta\cos\varphi - r\sin\vartheta\sin\varphi\,\dot\varphi)$$

$$= r^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\,\dot\varphi + r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\,\dot\varphi$$

$$L_z = m r^2\dot\varphi\sin^2\vartheta = L_z \text{ f. } \vartheta = \frac{\pi}{2}$$ im Kapitel Himmelsmechanik

↳ warum kann man das so wählen?

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(m r^2\dot\vartheta\right) = m r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2$$

$$(\dot r^2)\,\dot\vartheta + r^2\ddot\vartheta = r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2$$

wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ am Beginn der Bewegung, so ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ∀ Zeit.
(homogene Dgl.)

Bahngleichung: aus $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot r} = \frac{\partial L}{\partial r}$ ; f. $\dot\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = 1$

$$\ddot r = r\dot\varphi^2 - \frac{GM}{r^2} \qquad \dot\varphi^2 = \left(\frac{L_z}{m r^2}\right)^2$$

$$\ddot r = \frac{L_z^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

$$m\ddot r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad V_{eff} = +\frac{L_z^2}{2 m r^2} - \frac{GMm}{r}$$

✓

Damit sind Bahngleichungen ohne langes Rechnen bekannt.

## b) Teilchen im elektromagnetischen Feld (ÜA 17)

nicht mechanisches Problem und bisher nur Lorentzkraft bekannt:

$$\vec{f}_L = q\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r},t)\right)$$

Kennen zunächst kein Potential f. die Kraft, $E, B$ können gewählt werden, aber es gilt:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \,;\, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{(später in ED und Tutorium)}$$

→ unklar, was $V$ in $L = T - V$ ist.

$\boxed{\text{Aber:}}$ man $L$ irgendwie angeben, Hauptsache die richtigen Bewegungsgleichungen entstehen:

„The question of what the action ($S = \int dt\, L$) should be, … must be determined by some kind of trial and error, … you have to fiddle around." Richard Feynman

→ Motivation Quantenmechanik geben: – Energie $H$ (später $H$-Fkt)
– kanonischer Impuls

$$L_{\text{Teil}} = T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

$$\left( L_{\text{Feld}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \quad \rightarrow \text{später} \right)$$

$$L_{\text{Teil-Feld}} = \underbrace{-q\,\phi(\vec{r},t)}_{\substack{V = q\phi \\ \text{Energie im Feld}}} + \underbrace{q\,\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r},t)}_{\text{Strom mal Vektorpotential}} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Lorentzkraft reproduzieren:

kartesische Koordinaten: $\vec{r} = (x, y, z)$, $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

$$\underset{(a)}{\frac{\partial L}{\partial x_i}} = \underset{(b)}{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}$$

(i) $$\frac{\partial L}{\partial x} = -q\,\partial_x \phi + q\,\dot{\vec{r}} \cdot (\partial_x A_x, \partial_x A_y, \partial_x A_z)$$

$$= -q\,\partial_x\phi + q\left(\dot{x}\,\partial_x A_x + \dot{y}\,\partial_x A_y + \dot{z}\,\partial_x A_z\right)$$

ÜA

$$= -q\,\partial_x\phi + q\left(\dot{x}\,\partial_x A_x + \dot{y}\,\partial_y A_x + \dot{z}\,\partial_z A_x\right)$$
$$- q\left(-\dot{z}\,\partial_x A_z + \dot{z}\,\partial_z A_x + \dot{y}\,\partial_y A_x - \dot{y}\,\partial_x A_y\right)$$

$$= -q\,\partial_x\phi + q\,(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})A_x + q\left[\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]_x$$

$$= -q\,\partial_x\phi + q\left(\frac{d}{dt}A_x - \frac{\partial}{\partial t}A_x\right) + q\left[\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]_x$$

(ii) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + q\frac{d}{dt}\left(A_x(\vec{r}, t)\right) = m\ddot{x} + q\frac{d}{dt}A_x$$

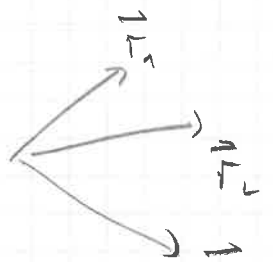
$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -q\,\partial_x\phi - q\frac{\partial}{\partial t}A + q\left[\dot{\vec{r}}\times\vec{B}\right]_x$$

$$m\ddot{x} = q\left(E_x(\vec{r},t) + \left[\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right]_x\right)$$

$$T = mc^2\left(1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \Big/ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\left(mc^2 \cdot -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}\right)^{-3/2}\cdot\left(-2\frac{\dot{q}}{c^2}\right)\right)$$

$$= m\frac{d}{dt}\frac{\dot{q}}{\left(1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

## 2.4 Euler Lagrange Formalismus f. Vielteilchensysteme




viele Teilchen mit $\vec r_1 \cdots \vec r_k \cdots \vec r_N$

$\vec r_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$

Definition der Lagrangefunktion $L = T(\{\dot x_{ki}\}) - V(\{x_{ki}\})$

oder wenn $\{x_{ki}\} \to \{q_i\}$ : $L = T(\dot q_i) - V(q_i)$

dabei Ableitg. zu 1 Teilchen aus Hamiltonprinzip / kleinster Wirkg

Keine Annahme über Zahl „i" eingegangen, so gilt wieder:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Beispiel: Gravitations WW von Punktmassen

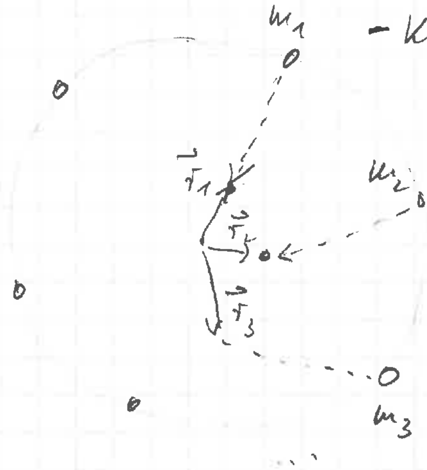
a) Potentielle Energie einer Masseverteilung


Ansammlung v. Punktmassen, seien ruhend, z.B. ruhende Billardkugel

$E = T + V$, für ruhende Punktmassen: $\dot{\vec r}_i = 0$

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec r}_i^{\,2} + V(\{\vec r_i\}) = V(\{\vec r_i\})$$

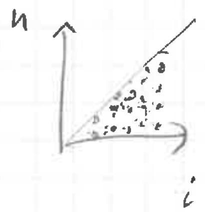
es verbleibt, V zu bestimmen




- Kugeloberfläche im $\infty$, mit endlich vielen Punktmassen belegt, keine WW untereinander
- Idee: Masse zum Zentrum holen und anzuordnen, dabei feststellen, wieviel Energie hier aufbauen durch WW
- Anziehungsenergie muß anderweitig balanciert werden (gleich)

- erste Masse: $\Delta E = 0$, hat dieselbe Energie wie in $\infty$, sieht $V = 0$
- zweite Masse: $m_1$ bereits da: $\Delta E = \Delta V_1 = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$
- dritte Masse $m_1, m_2$ bereits da:

$$\Delta E = \Delta V_2 = -\frac{G m_1 m_3}{|\vec r_1 - \vec r_3|} - \frac{G m_2 m_3}{|\vec r_2 - \vec r_3|}$$




n-te Masse: $m_1 \dots m_{n-1}$ bereits da: $\Delta E = \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n-1} - \frac{G m_i m_n}{|\vec r_i - \vec r_n|}$

$$E = V = -\sum_{n=1}^{N} \sum_{i<n} \frac{G m_i m_n}{|\vec r_i - \vec r_n|} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{n,i \\ (\text{alle})}} \frac{G m_i m_n}{|\vec r_i - \vec r_n|}$$

$N=2$: leicht zu sehen

$\frac{1}{2}$ dient z. Vermeidung v. Doppelzählung.

## b) Lagrangefunktion der ww. Teilchen (ÜA16)

$$L = T - V = \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{2} \dot{\vec{r}}_n^{\,2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{G m_n m_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ej}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ej}} \sum_{n,i} \frac{m_n}{2} \dot{x}_{ni}^2 = \sum_{ni} \frac{m_n}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ej}} \dot{x}_{ni}^2$$

ü.A

$$= \sum_{ni} \frac{m_n}{2} 2 \dot{x}_{ni} \frac{\partial \dot{x}_{ni}}{\partial \dot{x}_{ej}} = \sum_{ni} m_n \dot{x}_{ni} \delta_{ne} \delta_{ij} \overset{!}{=} m_e \dot{x}_{ej}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ej}} = \underline{\frac{\partial}{\partial x_{ej}}} \frac{1}{2} \sum_{n,m} \underline{\frac{G m_n m_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}} \overset{\text{ÜA}}{=} - \sum_{m} \frac{G m_e m_m (x_{ej} - x_{nj})}{|\vec{r}_e - \vec{r}_n|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{ej}} \left( \sum_k (x_{nk} - x_{mk})^2 \right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{ej}} \sum_k (x_{nk} - x_{mk})^2$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|^3} \sum_k 2 (x_{nk} - x_{mk}) \frac{\partial}{\partial x_{ej}} (x_{nk} - x_{mk})$$

$$= \frac{-1}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|^3} \sum_k (x_{nk} - x_{mk}) (\delta_{ne} \delta_{jk} - \delta_{em} \delta_{jk}) = \frac{-1}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|^3} (x_{ej} \delta_{en} - x_{ej} \delta_{em} - x_{mj} \delta_{en} + x_{ej} \delta_{em})$$

$$= \frac{-1}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|^3} (x_{nj} - x_{mj}) (\delta_{ne} - \delta_{em}) \Rightarrow -2 \frac{(x_{ej} - x_{nj})}{|\vec{r}_e - \vec{r}_m|^3} \delta_{me}$$

$\cdot 2$

$m \to n$ Index

$$m_e \ddot{x}_{e_j} = -G m_e \sum_n \frac{m_n (x_{e_j} - x_{n_j})}{|\vec{r}_e - \vec{r}_n|^3}$$