

## 4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

**Abgabe: Freitag 22.11.19** vor der Übung

### **Aufgabe 1 (5 Punkte): *Energie-Impuls und Bahndrehimpuls***

Der elektromagnetische Feldstärke-Tensor, der in der geometrischen Optik benutzt wird lautet

$$F_{\alpha\beta} = \lambda(A_\beta k_\alpha - A_\alpha k_\beta),$$

wobei  $k_\alpha$  ein Nullvektor (lichtartiger Vektor) ist, d.h.  $k_\alpha k^\alpha = 0$  gilt, und der Eigenschaft  $k_\alpha A^\alpha = 0$  genügt ( $\lambda$  bezeichnet eine Konstante). Durch den Ansatz bedingt ist  $k_\alpha$  ein Gradientenfeld, d.h.  $k_\alpha = S_{,\alpha}$ , auf den Flächen konstanter Phase  $S$ .

a) Bestimmen Sie den Energie-Impuls-Tensor für den obigen Feldstärke-Tensor

$$T^\beta{}_\gamma = \frac{c}{4\pi} \left( F^{\alpha\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4} \delta^\beta{}_\gamma F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \right) \quad (1)$$

im Fall, dass der Betrag des Vierer-Potentials  $A_\alpha$  auf 1 normiert ist.

b) Bilden Sie den Bahndrehimpuls-Tensor

$$M^{\alpha\beta\gamma} := x^{[\alpha} T^{\beta]\gamma} \quad (2)$$

dieses Feldes und bestimmen Sie die Energie-Impuls-Bilanz (ohne äußere Quellen) und die Bahndrehimpuls-Bilanz  $M^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = 0$  wenn  $k^\alpha{}_{,\alpha} = 0$  gilt.

### **Aufgabe 2 (5 Punkte): *Energie-Impuls-Bilanz eines idealen Fluids in der Speziellen Relativitätstheorie - Newtonscher Limes***

Der Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids ist definiert durch

$$T^{\alpha\beta} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - p \eta^{\alpha\beta},$$

wobei  $\rho$  die Massendichte,  $p$  der Druck und  $u^\alpha$  das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist (in der Vorlesung eingeführt).

- (i) Leiten Sie die Energie-Impuls-Bilanz  $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$  (kräftefreier Fall) für diesen Tensor ab.
- (ii) Beweisen Sie, dass die Nullkomponente dieser Gleichung im nichtrelativistischen Grenzfall in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho v^i) = 0 \quad (3)$$

übergeht. Vernachlässigen Sie dazu alle Terme  $O(c^{-1})$  sowie  $\dot{u}^\alpha$ , benutzen Sie die Zerlegungen für  $(u^\alpha) = \gamma(c, v^i)$  und beachten Sie, dass  $\gamma \cong 1$  gilt.