

Prof. Dr. Kathy Lüdge

Alexander Kraft, Leonhard Schülen, Thomas Martynek, Jonah Friederich, Isaac Tesfaye

13. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik**Abgabe: Mi. 29.01.2020 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude****Aufgabe 34 (10 Punkte): Bonusaufgabe: Noether-Theorem für Felder**

In dieser Aufgabe werden wir mit Hilfe von Noether's Theorem, welches Symmetrien und Erhaltungsgrößen verbindet, den Energie-Impuls-Tensor für ein skalares Feld. Kurz gefasst, besagt Noether's Theorem, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eine assoziierte Erhaltungsgröße existiert. Wir beginnen der Einfachheit halber mit einer skalaren Feldtheorie. Betrachte das Wirkungsintegral

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi), \quad (1)$$

wobei $\mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi)$ die Lagrangedichte ist und ϕ ein skalares Feld. Wir nehmen an, dass \mathcal{L} nicht explizit von den Koordinaten abhängt. Die Euler-Lagrange-Gleichungen der Bewegung sind

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} = 0 \quad (2)$$

Wir nennen eine kontinuierliche Transformation

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (3)$$

eine *Symmetrie* der Wirkung S , wenn die Lagrangedichte \mathcal{L} sich durch eine 4-er Divergenz ändert, also

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi) + \partial_\alpha K^\alpha(x) \quad (4)$$

für *beliebiges* $\phi(x)$. Mit anderen Worten, $\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha K^\alpha(x)$.

- (a) Nehmen Sie an, dass die Wirkung, wie oben definiert, invariant unter einer Symmetrie ist. Zeigen Sie, dass die Größe

$$j^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \delta\phi(x) - K^\alpha(x) \quad (5)$$

erhalten ist, dass also $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ gilt. Dann heißt die zur speziellen Symmetrie gehörige Erhaltungsgröße j^α Noether-Strom. *Hinweis: Berechne die Variation von \mathcal{L} direkt ("Kettenregel") und verwende die Bewegungsgleichung. Randterme können hier nicht vernachlässigt werden!*

Der Energie-Impuls-Tensor ist definiert als der Noether-Strom, welcher mit der Symmetrie bezüglich der konstanten Raumzeit-Translation $x_\alpha \rightarrow x_\alpha + \varepsilon_\alpha$ einhergeht. Es ist nützlich die Raumzeit-Translation als Feldtransformation zu schreiben. Dafür definiert man ein neues Feld

$$\phi'(x) := \phi(x - \varepsilon) \approx \phi(x) - \varepsilon^\alpha \partial_\alpha \phi(x) \quad (6)$$

Da wir vier unabhängige Translationen betrachten, existieren somit vier erhaltene Ströme. Wir erwarten, dass die Ströme folgende Form haben $j^\alpha = -T^\alpha_\beta \varepsilon^\beta$. Die Koeffizienten T^α_β bilden den Energie-Impuls-Tensor.

Bitte Rückseite beachten! →

13. Übung TPIII WS 19/20

- (b) Berechnen Sie $\delta\mathcal{L}$ für diesen Fall und identifizieren Sie K^α und $\delta\phi$. Benutzen Sie diese Ausdrücke, um j^α zu finden und bestimmen Sie den Energie-Impuls-Tensor T^α_β .

Man kann Vorangegangenes auch für mehrere Felder verallgemeinern ϕ_i , wobei i einen Index darstellt, welcher die Felder durchnummeriert. Ein Ergebnis aus der Verallgemeinerung, angewendet auf die Maxwell- Theorie, führt auf den Energie-Impuls-Tensor der Elektrodynamik. (Um noch etwas präziser zu sein, soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass der Energie-Impuls-Tensor, welcher sich als Noether-Strom aus der Translationsinvarianz ergibt, nicht eichinvariant ist. Dies kann jedoch auch mit etwas Aufwand erreicht werden und man erhält den „richtigen“ Energie-Impuls-Tensor.)

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
Ab dem zweiten Übungsblatt werden Zweierabgaben nicht mehr akzeptiert. Einzelabgaben werden generell nicht akzeptiert. Zur Vermittlung benutzt bitte die eingerichtete Gruppenbörse am EW 060.
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
Prof. Dr. Kathy Lüdge	Fr, 10:15-11:15	EW 741
Alexander Kraft	Mi, 15:00-16:00	EW 269
Leonhard Schülen	Do, 10:00-11:00	ER 242
Thomas Martynec	Mo, 14:00-15:00	EW 279
Jonah Friederich	Di, 10:00-11:00	EW 060
Isaac Tesfaye	Do, 15:00-16:00	EW 060