

Prof. Dr. Holger Stark, Josua Grawitter, Maximilian Seyrich
Lasse Ermoneit, Philip Knospe, Isaak Mengesha und Philipp Stammer

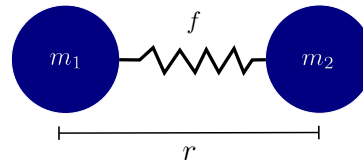
6. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Termine: **S** Abgabe bis Donnerstag, 28.11.2019, 12 Uhr im Briefkasten am ER-Eingang
M Vorrechnen in den Tutorien Dienstag, 26.11. – Montag, 02.12.2019

Bitte die Matrikelnummern und mind. ein Tutor auf dem Aufgabenzettel angeben.

S Aufgabe 16 (9 Punkte): 2-Körper-Probleme (schriftlich 2+2+2+3=9)

Zwei Körper der Massen m_1 und m_2 seien über eine Feder mit Ruhelänge r_0 aneinander gekoppelt (s. Skizze). Das dazugehörige Potential lautet $U(r) = \frac{1}{2}f(r - r_0)^2$.



- Leiten Sie aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen der Ortsvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 der zwei Körper die Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt und den Relativvektor her. Auf welcher Bahn bewegt sich der Schwerpunkt?
- Welche Erhaltungssätze gelten für die Relativbewegung? Warum findet sie in der Ebene statt? Wählen Sie für den Drehimpuls $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_z$ und berechnen sie L mithilfe von Polarkoordinaten.
- Berechnen Sie die Gesamtenergie in Polarkoordinaten. Diskutieren Sie die möglichen Bahnen mit Hilfe des effektiven Potentials. Wie hängen sie von L ab.
- Es ist bequemer die Bahnen in kartesischen Koordinaten zu bestimmen. Lösen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für $r_0 = 0$ aus Aufgabenteil (a). Auf welcher Bahn bewegt sich die reduzierte Masse?

M Aufgabe 17 (4 Punkte): Lenz-Vektor (mündlich 1+2+1)

Gegeben sei ein Massenpunkt der Masse μ , der sich in einem Zentralkraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r)$ bewegt. \mathbf{v} ist die Geschwindigkeit und \mathbf{L} der Drehimpuls des Teilchens. Der Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + V(r)\mathbf{r}$$

wird als verallgemeinerter, zum Potential $V(r)$ gehöriger Lenz-Vektor bezeichnet.

- Zeigen Sie, dass für das Potential $V(r) = -\alpha/r$ der Lenz-Vektor eine Erhaltungsgröße ist. Berechnen Sie hierzu $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$.
- Zeigen Sie nun mit Hilfe des Lenz-Vektors, dass sich die Bahnkurve des Teilchens für $\alpha > 0$ in der aus der Vorlesung bekannten Form

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

schreiben lässt, wobei φ der Winkel zwischen \mathbf{A} und \mathbf{r} ist. Geben Sie die Bahnparameter p und ϵ als Funktion von μ , α , L und $|\mathbf{A}|$ an.

Hinweis: Betrachten Sie das Skalarprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$.

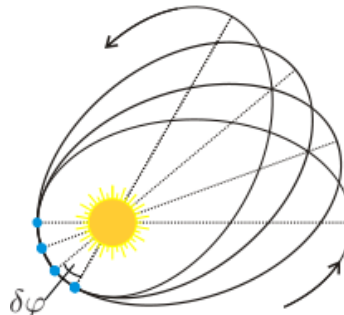
- Welche anschauliche Bedeutung hat der Lenz-Vektor \mathbf{A} ?

Bitte Rückseite beachten! →

6. Übung TP1 WiSe19/20

S Aufgabe 18 (11 Punkte): Periheldrehung (schriftlich 1+3+7=11)

Im Potential $V(r) = -\alpha/r$ bewegt sich ein Massenpunkt auf einer Ellipsenbahn. Kleine Störungen δV des Potentials führen zu einer Periheldrehung: Nach jedem Umlauf ändert sich die Richtung des Perihels (Punkt mit minimalem Abstand zum Zentrum) um den Winkel $\delta\varphi$. Während einer Umrundung auf dem Weg von Perihel zu Perihel ändert sich der Winkel um



$$(19.1) \quad \Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2\mu[E - V(r)] - L^2/r^2}} dr$$

$$(19.2) \quad \stackrel{(*)}{=} -2\sqrt{2\mu} \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r)} dr.$$

- (a) Motivieren Sie Gleichung (19.1).
 (b) Zeigen Sie, dass das Gleichheitszeichen (*) gilt.
 (c) Zeigen Sie, dass die Winkeländerung $\delta\varphi$ für das Potential $V(r) = -\alpha/r + \delta V(r)$ in erster Näherung gegeben ist durch

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi \approx 2\mu \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{1}{L} \int_0^\pi r^2 \delta V(r) d\varphi \right],$$

wobei $r = r(\varphi)$ die ungestörte Lösung (siehe Gl. (6.16) aus der VL) ist.
 Dazu:

1. Linearisieren Sie den Integranden von (19.2) in δV .
Hinweis: Welches $\Delta\varphi$ erhält man für $\delta V = 0$?
2. Zeigen Sie, dass sich die Wurzel in (19.2) als $\sqrt{\mu/2} \dot{r}$ schreiben lässt.
3. Benutzen Sie außerdem $dr/\dot{r} = d\varphi/\dot{\varphi}$ und $\dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$.