

Prof. Dr. Holger Stark, Josua Grawitter, Maximilian Seyrich
Lasse Ermoneit, Philip Knospe, Isaak Mengesha und Philipp Stammer

8. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Termine: **S** Abgabe bis Donnerstag, 12.12.2019, 12 Uhr im Briefkasten am ER-Eingang
M Vorrechnen in den Tutorien Dienstag, 10.12. – Montag, 16.12.2019

Bitte die Matrikelnummern und mind. ein Tutor auf dem Aufgabenzettel angeben.

S Aufgabe 22 (8 Punkte): *Symmetrische Tensoren (4+4)*

Tensoren zweiter Stufe sind "Maschinen", die aus einem Vektor \mathbf{a} einen Vektor $\mathbf{b} = \mathbf{T} \mathbf{a}$ machen. Wichtig dabei ist, dass diese Abbildung linear ist. Es gilt also:

$$\mathbf{T}(p\mathbf{a} + q\mathbf{b}) = p\mathbf{T}\mathbf{a} + q\mathbf{T}\mathbf{b}.$$

Ein Beispiel ist der Trägheitstensor, welcher der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ eines starren Körpers dessen Drehimpuls \mathbf{L} zuordnet; im Allgemeinen sind $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{L} nicht parallel.

- (a) Gilt $\mathbf{T}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$, so nennt man \mathbf{a} einen Eigenvektor von \mathbf{T} zum Eigenwert λ . Zeigen Sie, dass ein symmetrischer Tensor, der nur reelle Komponenten besitzt, reelle Eigenwerte $\lambda^{(i)}$ besitzt und seine Eigenvektoren $\mathbf{a}^{(i)}$ orthogonal zueinander sind. (*Hinweis:* Sei $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$.) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Reelle, symmetrische Tensoren haben in drei Dimensionen genau 3 Eigenwerte. Warum? Berechnen Sie die Komponenten von \mathbf{T} bezüglich der Basis $\{\mathbf{a}^{(i)} \otimes \mathbf{a}^{(j)}, i, j = 1, 2, 3\}$, wobei die $\mathbf{a}^{(i)}$ die auf Eins normierten Eigenvektoren aus (a) sind. Wenden Sie das Ergebnis auf \mathbf{B} aus (a) an.

S Aufgabe 23 (12 Punkte): *Trägheitstensor (3+4+5)*

Bestimmen Sie den Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}$ folgender Körper:

- (a) Ein Ziegel homogener Massendichte ρ_0 mit Kantenlängen a, b, c . Wie lautet $\boldsymbol{\Theta}$ im Grenzfall eines Würfels?
- (b) Ein Ellipsoid homogener Massendichte ρ_0 mit Halbachsen a, b, c . Zeigen Sie zuerst, dass für Ellipsoidkoordinaten gilt

$$dV = dx dy dz = abc r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \quad ,$$

indem Sie die Funktionaldeterminante berechnen. Wie lautet $\boldsymbol{\Theta}$ im Grenzfall einer Kugel?

- (c) Ein Methan (CH_4) Molekül. Rechnen Sie in atomaren Masseneinheiten, also $m_{\text{H}} = 1 \text{ u}$ und $m_{\text{C}} = 12 \text{ u}$. Die Bindungslänge betrage l_0 . Zeigen Sie zuerst, dass für den Bindungswinkel ϑ gilt $\sin \vartheta = 2\sqrt{2}/3$. Dies entspricht einem Winkel von $\vartheta \approx 109,5^\circ$.

Bitte Rückseite beachten! →

8. Übung TP1 WiSe19/20

M Aufgabe 24 (2 Punkte): Trägheitsellipsoid

Betrachtet man die kinetische Rotationsenergie eines starren Körpers $T = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} / 2$ und substituiert $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\omega} / \sqrt{2T}$, dann erhält man

$$1 = \sum_{ij} \gamma_i \Theta_{ij} \gamma_j = \gamma_i \Theta_{ij} \gamma_j$$

- (a) Zeigen Sie, dass dies die Gleichung für die Oberfläche eines Ellipsoiden im $\boldsymbol{\gamma}$ -Raum ist. *Hinweis:* Sie können ohne detaillierte Berechnung in ein geeignetes Bezugssystem wechseln.
- (b) *Poinsotsche Konstruktion:* Zeigen Sie, dass der Drehimpuls \mathbf{L} zu einer Rotation $\boldsymbol{\omega}$ stets senkrecht auf der Oberfläche des Trägheitsellipsoiden steht. *Hinweis:* Welcher Differentialoperator verbindet T und \mathbf{L} ?

M Aufgabe 25 (2 Punkte): Satz von Steiner

- (a) Beweisen Sie den Satz von Steiner.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satz von Steiner und dem Ergebnis aus Aufgabe 23(b) den Trägheitstensor eines Körpers der aus zwei identischen, homogenen Kugeln mit Radius R besteht, die an ihrem Berührungspunkt P zusammengeschweißt sind.

| | |
|-------------------|--|
| Vorlesung: | <ul style="list-style-type: none">• Dienstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201• Mittwoch 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201 |
| Webseite: | <ul style="list-style-type: none">• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter https://www.tu-berlin.de/?208078 |
| Klausurkriterien: | <ul style="list-style-type: none">• mindestens 50 % der schriftlichen Übungspunkte S und• mindestens 50 % der mündlichen Übungspunkte M |
| Klausur: | <ul style="list-style-type: none">• Freitag, den 14.02.2019, von 08:00 – 10:00 Uhr in H 0105 |
| Nachklausur: | <ul style="list-style-type: none">• Freitag, den 21.02.2019, von 08:00 – 10:00 Uhr in EW 201• Teilnahme nur durch Qualifikation in der Klausur oder Prüfungsunfähigkeit am Klausurtermin |
| Scheinkriterium: | <ul style="list-style-type: none">• bestandene Klausur |

Bemerkung: Die Übungsaufgaben werden nur als dokumentenechte, handschriftliche, gut lesbare Originale akzeptiert. Wir akzeptieren weder Kopien noch elektronische Abgaben. Aufgaben bitte in Gruppen von drei Personen einreichen.