

VL: Dr. Anna Zakharova
 UE: Dr. Mohsen Khadem

4. Übungsblatt zur Theor. Physik VI: Nichtgleichgewichtsstatistik

Abgabe: Mi 04.12.2019. Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.

Aufgabe 8 (20 Punkte): Stochastic Resonance

Consider a two-state model of stochastic resonance in which position x takes on discrete values x_+ and x_- with probabilities $p(x = x_{\pm}) = n_{\pm}$ such that $n_+ + n_- = 1$, as defined in the paper [McNamara and Wiesenfeld, PRA **39**, 4854 (1989)]. The dynamics can be described by the master equation

$$\frac{dn_+}{dt} = -\frac{dn_-}{dt} = W_-(t)n_- - W_+(t)n_+ = W_-(t) - [W_+(t) + W_-(t)]n_+$$

with $W_{\pm}(t)$ the transition rate out of state x_{\pm} . For this rate we employ Kramers' rate for a periodically driven barrier: $W_{\pm}(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{1}{D}(U_0 \pm U_1 \cos \Omega t)\right]$.

1. Expand the rates as $W_{\pm}(t) \approx \frac{1}{2}(\alpha_0 \mp \alpha_1 \eta_0 \cos \Omega t)$ for small driving amplitude, $\eta_0 = U_1/D \ll 1$, and identify parameters α_0 and α_1 .
2. To first order in η_0 , show that the solution of the rate equation is

$$n_+(t|x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left[\exp[-\alpha_0(t-t_0)] \left(2n_+(t_0) - 1 - \frac{\alpha_1 \eta_0 \cos(\Omega t_0 - \phi)}{\sqrt{\alpha_0^2 + \Omega^2}} \right) + 1 + \frac{\alpha_1 \eta_0 \cos(\Omega t - \phi)}{\sqrt{\alpha_0^2 + \Omega^2}} \right]$$

with phase $\phi = \arctan \Omega/\alpha_0$.

3. Show that, in the asymptotic limit $t_0 \rightarrow -\infty$, we have $\langle x(t) \rangle = \bar{x}(D) \cos(\Omega t - \phi)$, and identify $\bar{x}(D)$ in terms of Kramers rate parameters. Assume a symmetric system $x_{\pm} = \pm 1$ and take the probability distribution function to be $p(x) = n_+ \delta(x - x_+) + n_- \delta(x - x_-)$.
4. In the limit $t_0 \rightarrow -\infty$, the autocorrelation function reads

$$\langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle = \exp(-\alpha_0|\tau|) \left(1 - \frac{\alpha_1^2 \eta_0^2 \cos^2(\Omega t - \phi)}{\alpha_0^2 + \Omega^2} \right) + \frac{\alpha_1^2 \eta_0^2 [\cos(\Omega \tau) + \cos(\Omega(2t + \tau) + 2\phi)]}{2(\alpha_0^2 + \Omega^2)}$$

Calculate the power spectrum $S(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) \overline{\langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle}$ of the initial phase-averaged autocorrelation function

$$\overline{\langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle} = \Omega/(2\pi) \int_0^{2\pi/\Omega} dt \langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle.$$

5. Determine the signal-to-noise ratio, SNR (see lecture notes for definition).
6. Sketch $\bar{x}(D)$ and the SNR as a function of noise strength D and discuss. Find the value of D which optimizes the SNR. Is this the same value that optimizes $\bar{x}(D)$?

4. Übung TPVI WS19/20

- Vorlesung:**
- Montag 12:15 Uhr – 13:45 Uhr im EW 203.
 - Mittwoch 10:15 Uhr – 11:45 Uhr im EW 203.
- Übung:**
- Mittwoch, 14:00 – 16:00 Uhr im EW 229.
- Anmeldung:** Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung “Statistische Physik im Nichtgleichgewicht” erfolgt über das Moseskontosystem: <https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto>.
- Webseiten:**
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter: https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201920/wahlpflichtveranstaltungen_master/statistische_physik_im_nichtgleichgewicht/
- Scheinkriterien:**
- Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).
 - Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).
 - Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
- Kontakte:**
- Dr. Anna Zakharova, ER 244, 314-28948, anna.zakharova@tu-berlin.de, Sprechzeiten nach Vereinbarung
 - Dr. Mohsen Khadem EW 266, 314-28849, jebreilkhadem@physik.tu-berlin.de, Sprechzeiten Do. 16:00-17:00