

Prof. Sabine Klapp

Dr. Alexander Carmele, Dr. Malte Selig, Arne Zantop

**3. Übungsblatt – Quantenmechanik II****Abgabe: Do. 14.11.2019 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude***Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.***Aufgabe 7 (12 Punkte): Reflexion und Transmission an einer Potentialschwelle**Berechnen Sie den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten an einer Potentialschwelle  $e\phi(z) = V_0\Theta(z)$  nach der zeitunabhängigen Dirac-Gleichung

(1) 
$$H_D|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle = E|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle$$

mit dem Dirac-Operator  $H_D = H_D^0 + e\phi$  und dem freien Anteil  $H_D^0 = c\hat{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_e c^2$ . überlegen Sie sich hierzu zunächst geeignete Lösungsansätze für  $z < 0$  und  $z > 0$ . Nutzen Sie, dass alle Komponenten der Spinoren stetig sind. Betrachten und diskutieren Sie die Reflexion und Transmission für die Fälle

- (i)  $E - V_0 > mc^2$ ,
- (ii)  $|E - V_0| < mc^2$  und
- (iii) für das sogenannte Klein'sche Paradoxon mit  $E - V_0 < -mc^2$ .

**Aufgabe 8 (8 Punkte): Zitterbewegung**Bei einer einzigen räumlichen Dimension lässt sich die Dirac-Gleichung in der Form ( $\hbar = c = 1$ )

(2) 
$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left( -i\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_3 m \right) \psi(x, t) = H\psi(x, t)$$

schreiben. Hier sind  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  Pauli-Matrizen,  $m$  ist die Masse des Teilchens und  $\psi(x, t)$  ist ein zwei-komponentiger Spinor.

- (a) Leiten Sie die Dirac-Gleichung (2) her, indem Sie analog vorgehen wie in der Vorlesung für  $(3+1)$  Dimensionen.
- (b) Leiten Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für Operatoren  $\hat{x}$  und  $\sigma_1$  her

(3) 
$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{x} = \sigma_1,$$

(4) 
$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_1 = 2i(\hat{p} - \sigma_1 H).$$

- (c) Finden Sie die Lösung zum Heisenbergschen Ortsoperator

(5) 
$$\hat{x}(t) = \hat{x} + v_{cl}(\hat{p})t + \hat{Z}(t),$$

und geben Sie die Form der Operatoren  $v_{cl}(\hat{p})$  und  $\hat{Z}(t)$  an.

- (d) Welche Form hat  $v_{cl}(\hat{p})$  im nicht-relativistischen Fall?
- (e) Finden Sie eine Anfangsbedingung bei der der Term  $\hat{Z}(t)$  nicht zu  $\langle \hat{x} \rangle(t)$  beiträgt und außerdem, eine bei der  $v_{cl}(\hat{p})$  nicht zu  $\langle \hat{x} \rangle(t)$  beiträgt. Was bedeutet das physikalisch?