

Prof. Sabine Klapp

Dr. Alexander Carmele, Dr. Malte Selig, Arne Zantop

**9. Übungsblatt – Quantenmechanik II****Abgabe: Do. 09.01.2020 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude***Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.***Aufgabe 16 (6 Punkte):** *Kommutatorrelation von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren*

Zeigen Sie die Kommutatorrelation von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren

$$\left[ \hat{a}_\beta, \hat{a}_\gamma^\dagger \right]_{\mp} = \hat{a}_\beta \hat{a}_\gamma^\dagger \mp \hat{a}_\gamma^\dagger \hat{a}_\beta = \delta_{\beta,\gamma}.$$

Betrachten Sie dazu die Wirkung des Operators auf einen beliebigen symmetrischen / antisymmetrischen  $N$ -Teilchenzustand  $|\phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)}$ . In der Vorlesung wurde die Wirkung des Erzeugungsoperators auf einen beliebigen symmetrischen / antisymmetrischen  $N$ -Teilchenzustand gezeigt:

$$\hat{a}_\gamma^\dagger |\phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)} = \sqrt{N+1} |\phi_\gamma \phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)}.$$

Zeigen Sie zunächst auch die Wirkung des Vernichtungsoperators auf einen beliebigen symmetrischen / antisymmetrischen  $N$ -Teilchenzustand,

$$\begin{aligned} \hat{a}_\beta |\phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \delta_{\beta,\alpha_1} |\phi_{\alpha_2} \dots \phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)} (\pm)^1 \delta_{\beta,\alpha_2} |\phi_{\alpha_1} \phi_{\alpha_3} \dots \phi_{\alpha_N}\rangle^{(\pm)} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (\pm)^{N-1} \delta_{\beta,\alpha_N} |\phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_{N-1}}\rangle^{(\pm)} \right), \end{aligned}$$

und schließen Sie dann auf die Vertauschungsrelation.

**Aufgabe 17 (10 Punkte):** *Zweiteilchenoperatoren in Zweiter Quantisierung*

Zeigen Sie, dass für Zweiteilchenoperatoren in zweiter Quantisierung gilt:

$$\hat{H}_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \hat{V}_2^{(i,j)} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2} \langle \phi_{\alpha_1}^{(1)} \phi_{\alpha_2}^{(2)} | \hat{V}_2^{(1,2)} | \phi_{\beta_1}^{(1)} \phi_{\beta_2}^{(2)} \rangle \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\beta_2} \hat{a}_{\beta_1}.$$

Dabei bezeichnen die  $|\phi_{\alpha_i}^{(i)}\rangle$  Einteilchenzustände des  $i$ -ten Teilchens. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Zeigen Sie zunächst, dass sich der Zweiteilchenoperator schreiben lässt als

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \sum_{\beta_1 \dots \beta_N} (\pm) \langle \phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_N} | \hat{H}_2 | \phi_{\beta_1} \dots \phi_{\beta_N} \rangle^{(\pm)} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \dots \hat{a}_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{a}_{\beta_N} \dots \hat{a}_{\beta_1}.$$

Hier bezeichnet  $|0\rangle\langle 0|$  den Projektor auf den Vakuumzustand.

- Vereinfachen Sie nun das Matrixelement  $(\pm) \langle \phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_N} | \hat{H}_2 | \phi_{\beta_1} \dots \phi_{\beta_N} \rangle^{(\pm)}$ , indem Sie die in den  $N$ -Teilchenzuständen auftauchende Permutation explizit auswerten.
- Um die Summation über die Teilchenindizes  $i, j$  auszuwerten, zeigen Sie, dass alle Beiträge  $i, j$  identisch sind.

9. Übung QM2 WS19/20

**Aufgabe 18 (4 Punkte):** *Dynamik des Vernichtungsoperators*

Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{\beta} \epsilon_{\beta} \hat{a}_{\beta}^{\dagger} \hat{a}_{\beta}.$$

Berechnen Sie die Bewegungsgleichung für den Vernichtungsoperator  $\hat{a}_{\alpha}$  unter Benutzung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung  $i\hbar\partial_t\hat{O} = [\hat{O}, \hat{H}]_{-}$ . Betrachten Sie dabei den Fall von fermionischen als auch von bosonischen Operatoren  $\hat{a}_{\alpha}$ . *Achtung: Egal ob Fermion oder Boson, in der Heisenberg-Gleichung steht immer der Kommutator.*

**Vorlesung:** Di. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 203,  
Do. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 203.

**Sprechzeiten:**

Prof. Sabine Klapp	Di.	13:15 - 14:00	in EW 707
Dr. Alexander Carmele	Di.	13:00 - 14:00	in EW 704
Dr. Malte Selig	Mo.	13:00 - 14:00	in ER 238
Arne Zantop	Fr.	14:00 - 15:00	in EW 701

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und **aktive** Teilnahme in den Übungen.

**Literatur zur Lehrveranstaltung:**

- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik (Springer)
- U. Scherz, Quantenmechanik (Teubner)
- F. Schwabl, Quantenmechanik für Fortgeschrittene (Springer)
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie (Aula-Verlag)
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 7: Vielteilchentheorie (Springer)