

11. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag, den 08. Februar 2021 vor der Übung
 Ausgabe: Montag, den 25. Januar 2021

Insgesamt 10 Punkte

Aufgabe 1: Hintergrundstrahlung

Betrachten Sie eine Photonengas, welches sich zu einem Zeitpunkt t_e im Gleichgewicht befindet, d.h. die Dichte $n(\nu_e, t_e)$ der Photonen ist (Plancksches Strahlungsgesetz)

$$n(\nu', t_e) d\nu' = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\nu'^2 d\nu'}{\exp(\hbar\nu'/kT_e) - 1}. \quad (1)$$

Bestimmen Sie die Änderung dieser Verteilung für den Robertson-Walker-Kosmos.

- Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtsverteilung unter der Expansion des Kosmos erhalten bleibt.
- Welche Abhängigkeit erhält man für die Entwicklung der neuen Gleichgewichtstemperatur?
- Diskutieren Sie das erhaltene Ergebnis.

Beachten Sie die Abhängigkeit zwischen Frequenz und Skalenparameter $\nu R(t) = \nu' R(t_e)$ und dass sich Volumina bei der Expansion mit $(\frac{R(t_e)}{R(t)})^3$ skalieren.

Aufgabe 2: Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle II

Nach der auf dem 5. Übungsbogen berechneten Abhängigkeit des Energie-Impuls-Tensors der freien Gravitationswelle vom Ricci-Tensor 2. Ordnung ist nun dessen Bestimmung notwendig.

- Zeigen Sie, dass

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(2)} - h^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(1)} \quad (2)$$

für $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ bzw. $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ gilt!

- Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (2), der Definition des Krümmungstensors

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu,\mu,\kappa} + g_{\mu\kappa,\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\lambda\kappa,\mu,\nu}) + g_{\eta\sigma}(\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \quad (3)$$

und den Christoffelsymbolen 1. Ordnung (Warum?)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(h^{\sigma}_{\mu,\nu} + h^{\sigma}_{\nu,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{\sigma}), \quad (4)$$

dass der Ricci-Tensor 2. Ordnung die Form

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = -\frac{1}{4}(h_{\sigma\kappa,\nu} + h_{\sigma\nu,\kappa} - h_{\kappa\nu,\sigma})(h_{\mu}{}^{\sigma,\nu} + h^{\sigma\nu}{}_{,\mu} - h_{\mu}{}^{\nu,\sigma}) - \frac{h^{\lambda\nu}}{2}(h_{\lambda\nu,\mu,\kappa} + h_{\mu\kappa,\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\lambda\kappa,\mu,\nu}). \quad (5)$$

hat. Es ist dabei zu beachten, dass $h_{\mu\nu}$ Lösung der freien Wellengleichung ist für die die Eichbedingung $2h^{\nu}{}_{\mu,\nu} = h^{\nu}{}_{\nu,\mu}$ gilt. Ansonsten Terme höherer Ordnung vernachlässigen.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Falls es Fragen gibt, bin ich per Mail erreichbar:
 gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de