

3. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag, den 30. November 2020 vor der Übung
Ausgabe: Montag, den 16. November 2020

Variationsprinzip II (10 Punkte)

Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes mit Quellen im Riemannschen Raum lautet:

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{-g}L_M = \sqrt{-g} \left(\frac{c}{16\pi} F_{\kappa\mu} F_{\lambda\nu} g^{\kappa\lambda} g^{\mu\nu} + j_\kappa g^{\kappa\lambda} A_\lambda \right). \quad (1)$$

Hierbei sind A_κ das Vierer-Potential, j^κ der Strom und $F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$ der (antisymmetrische) elektromagnetische Feldstärketensor.

a) Bestimmen Sie durch Ausführung der Variation:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M)}{\delta g_{\alpha\beta}} \quad (2)$$

den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Warum müssen die Christoffelsymbole bei dieser Variation nicht beachtet werden? Achtung es muss ein symmetrischer Tensor herauskommen.

- b) Zeigen Sie, daß die homogene Maxwellgleichung automatisch durch den Zusammenhang zwischen Feldstärketensor $F_{\alpha\beta}$ und dem Potentialtensor A_γ erfüllt wird.
- c) Leiten Sie durch Variation nach den Vierer-Potentialen A_α die **kovarianten** inhomogenen Maxwellgleichungen ab. Da dieses Problem mit den zugehörigen Lagrange-Gleichungen äquivalent ist, können diese auch benutzt werden. **Hinweis:** Benutzen Sie die Identität $\Gamma_{\kappa\tau}^\kappa = \frac{\partial_\tau g}{2g}$.
- d) Beweisen Sie mit der in c) erhaltenen kovarianten inhomogenen Maxwellgleichung, daß die **kovariante** Ladungserhaltung $\nabla_\kappa j^\kappa = 0$ gilt.
- e) Bestimmen Sie die Divergenz des in a) abgeleiteten Energie-Impuls-Tensor und vereinfachen Sie diese weitestgehend. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Hinweise: Nehmen Sie bei Ihrer Rechnung an, daß gilt: $\frac{\delta(\sqrt{-g}j^\mu)}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0$

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!
Die Ausarbeitung ist handschriftlich anzufertigen!

Falls es Fragen gibt, bin ich per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de