Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. v. Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Dr. Schellstede

5. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag, den 14.. Dezember 2020 vor der Übung
Ausgabe: Montag, den 30. November 2020

Insgesamt 10 Punkte

Killing-Vektoren und die äußere Schwarzschildmetrik

Killing-Vektoren bezeichnen lokale Isometrien (Symmetrietransformationen) in der Raumzeit. Eine notwendige Bedingung für deren Existenz ist, daß ein Vektor ξ_α existiert, der die Gleichung

$$g_{\alpha\beta,\sigma}\xi^\sigma + 2g_{\lambda(\alpha}\xi^\lambda_{,\beta)} = 0 \tag{1}$$

erfüllt (Killing-Gleichung).

a) Zeigen Sie, daß Gleichung (1) zu folgender kovarianten Charakterisierung äquivalent ist.

$$\xi_{(\alpha;\beta)} = 0 \tag{2}$$

b) Bestimmen Sie die Killing-Vektoren ξ^α für die Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = (1 - \frac{a}{r})dt^2 - (1 - \frac{a}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\Theta^2 + sin^2\Theta d\phi^2) \quad . \tag{3}$$

Hinweise (für Teil b):

- Die bei einer partiellen Integration auftretende Integrationskonstante ist eine Funktion der übrigen Variablen!
- Stellen Sie zunächst das vollständige partielle Differentialgleichungssystem auf.
- Zeigen Sie mit drei dieser Gleichungen, daß $\xi^1 = 0$ gilt und ξ^0 nur eine Funktion von Θ und ϕ ist (eine Gleichung für ξ^1 kann direkt partiell integriert werden).
- Zeigen Sie, daß man mittels der anderen Gleichungen ähnliche Einschränkungen für ξ^2 und ξ^3. erhält.
- Setzen Sie Ihre bisherigen Zwischenergebnisse in die bisher noch nicht genutzten DGLen ein.
- Die von Ihnen ermittelte Lösung für ξ^α hängt von vier Integrationsparametern ab. Es können folglich vier linear unabhängige Vektoren $\underset{I}{\xi^\alpha}; \cdots ; \underset{IV}{\xi^\alpha}$ gebildet werden. Drei davon sind raumartig, einer zeitartig.

Kurze Bonusfragen ohne Rechnung (+2 Punkte):
Warum ist der zeitartige Killingvektor konstant, warum ist immer $\xi^1 = 0$ und an welchen zweidimensionalen Raum erinnern die drei raumartigen Killingvektoren?

Falls es Fragen gibt, bin ich per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de