

6. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag, den 04. Januar 2021 vor der Übung

Ausgabe: Montag, den 07. Dezember 2020

Insgesamt 10 Punkte

Aufgabe I: Test-Teilchen in einer Gravitationswelle (10 Punkte)

Betrachten Sie, eine ebene Gravitationswelle der Form

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ik(x^3-ct)} + c.c. \quad (1)$$

die als kleine Störung der Metrik

$$ds^2 = (\eta_{\nu\mu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

angesehen wird.

Untersuchen Sie, die Bewegung von Test-Teilchen auf die keine weiteren Kräfte einwirken. Zeigen Sie, dass unter der Anfangsbedingung $dx^i/d\tau = 0$ für $\tau = 0$, die Beschleunigung auf die Teilchen verschwindet (Hinweis: Geodätengleichung). Was bedeutet das für die Bahnkurve der Teilchen?

Betrachten Sie Teilchen auf einem Kreis mit dem Radius R in der $x^1 - x^2$ -Ebene. Leiten Sie die Änderung des relativen Abstandes

$$dl^2 = (\delta_{mn} - h_{mn}(t)) dx^m dx^n \quad (3)$$

der Teilchen im Feld der Gravitationswelle (1), für die Koordinatenwerte der Teilchen $x^1 = R \cos \phi$ und $x^2 = R \sin \phi$, ab.

Aufgabe II: Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle I

Für kleine Abweichungen von der flachen Raumzeit kann die Einsteinsche Theorie linearisiert werden. Die Metrik

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$$

soll nun durch die linearen Störungen $h_{\mu\nu}$ beschrieben werden. Für das Gravitationsfeld $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^\alpha_\alpha \eta_{\mu\nu}$ kann eine freie Wellengleichung abgeleitet werden:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (4)$$

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung eingeführte Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} (R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} R)^{(2)}) \quad (5)$$

im Falle einer quellenfreien Lösung, äquivalent zu

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} (2R_{\mu\nu}^{(2)} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{(2)}) \quad (6)$$

ist. Bitte beachten Sie dabei, dass man in der linearen Näherungen rechnet und eine **freie** Gravitationswelle beschreibt.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Falls es Fragen gibt, bin ich per Mail erreichbar:
 gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de