

Quantum Computation:

Zusammenfassung der 9. Vorlesung (17.06.2011)

2.2 Die Phasenbestimmung

Die Phasenbestimmung ist ein Algorithmus, auf den verschiedene andere Algorithmen aufbauen. Sie setzt die Fouriertransformation voraus. Sei $U : \mathbf{C}^{2^M} \rightarrow \mathbf{C}^{2^M}$ eine unitäre Transformation und χ ein normierter Eigenvektor von U , $U\chi = e^{2\pi i\phi}\chi$, $\phi \in [0, 1)$. Dann gilt

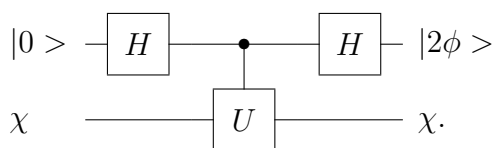
$$\left. \begin{array}{c} |0\rangle \text{---} [H] \text{---} \bullet \\ \chi \text{---} [U] \end{array} \right\} \Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes \chi + |1\rangle \otimes e^{2\pi i\phi}\chi) \\
 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i\phi}|1\rangle) \otimes \chi$$

Man kann nun zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $2\phi \in \mathbf{Z}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i\phi}|1\rangle) \otimes \chi \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \chi = H|0\rangle \otimes \chi & \text{falls } 2\phi = 0 \text{ (gerade)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \chi = H|1\rangle \otimes \chi & \text{falls } 2\phi = 1 \text{ (ungerade)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

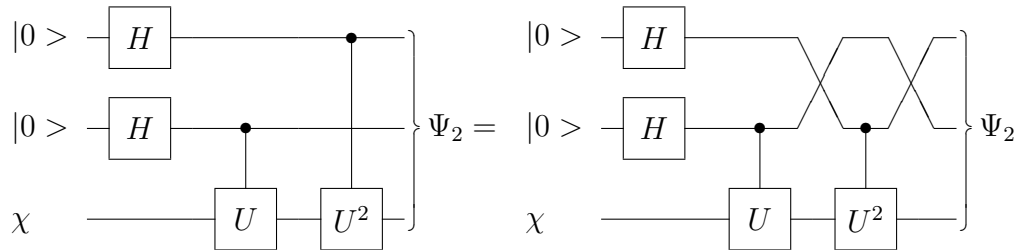
Somit liefert



Das Ergebnis x einer Messung von $|1\rangle\langle 1|$ am ersten Qubit ist also 2ϕ , mithin ist x in der Dualbruchnotation die erste Stelle von ϕ hinter dem Komma, $\phi = 0, x$.

$$\Psi_1 = \begin{cases} H|0\rangle \otimes \chi & \text{falls } \phi = 0, 0 \\ H|1\rangle \otimes \chi & \text{falls } \phi = 0, 1 \end{cases}$$

2. Fall: $2\phi \notin \mathbf{Z}$, dann betrachte man



Die letzte Schaltung erzeugt die folgende Transformation, deren Blöcke aus $2^M \times 2^M$ Matrizen bestehen:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & 0 & \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} & 0 & \\ & & & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & U^2 & & \\ & & \mathbf{1} & \\ & & & U^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & 0 & \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} & 0 & \\ & & & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & U & & \\ & & \mathbf{1} & \\ & & & U \end{pmatrix} (H \otimes H \otimes \mathbf{1}) \\
 = & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & \mathbf{1} & & \\ & & U^2 & \\ & & & U^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & U & & \\ & & \mathbf{1}_{2^N} & \\ & & & U \end{pmatrix} (H \otimes H \otimes \mathbf{1}) \\
 = & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & U & & \\ & & U^2 & \\ & & & U^3 \end{pmatrix} (H \otimes H \otimes \mathbf{1})
 \end{aligned}$$

Die Blöcke der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2^M} & & & \\ & U & & \\ & & U^2 & \\ & & & U^3 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \oplus U \oplus U^2 \oplus U^3 = \bigoplus_{k=0}^3 U^k$$

transformieren die Komponenten der direkten Zerlegung

$$\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^{2^M} = \bigoplus_{k=0}^3 |k\rangle_2 \otimes \mathbf{C}^{2^M}$$

in sich und übersies gilt

$$\left(\bigoplus_{k=0}^3 U^k \right) \left(\bigoplus_{k=0}^3 |k\rangle_2 \otimes \chi \right) = \bigoplus_{k=0}^3 |k\rangle_2 \otimes U^k \chi = \bigoplus_{k=0}^3 e^{2\pi i k \phi} |k\rangle_2 \otimes \chi.$$

Damit beschränkt sich die Wirkung des Gatters auf die zwei ersten Qubits, während der N -Qubit-Zustand χ unverändert bleibt. Bei Eingabe von $|0\rangle_2 \otimes \chi$ ist das Ergebnis der Wirkung des Gatters auf die ersten zwei Qubits durch

$$\begin{aligned} & \left(|0\rangle_2 \ |1\rangle_2 \ |2\rangle_2 \ |3\rangle_2 \right) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & e^{2\pi i \phi} & & \\ & & e^{4\pi i \phi} & \\ & & & e^{6\pi i \phi} \end{pmatrix} (H \otimes H) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(|0\rangle \ e^{2\pi i \phi} |1\rangle \ e^{4\pi i \phi} |2\rangle \ e^{6\pi i \phi} |3\rangle \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(|0\rangle \ e^{2\pi i \phi} |1\rangle \ e^{4\pi i \phi} |2\rangle \ e^{6\pi i \phi} |3\rangle \right), \end{aligned}$$

also ist

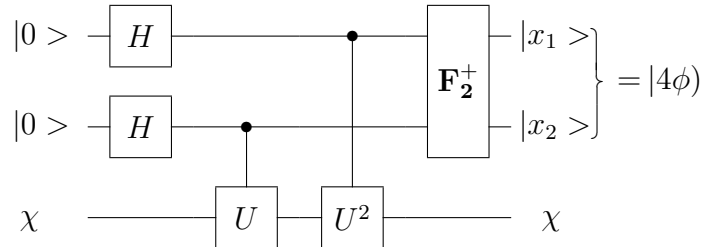
$$\Psi_2 := \frac{1}{2} (|0\rangle + e^{2\pi i \phi} |1\rangle + e^{4\pi i \phi} |2\rangle + e^{6\pi i \phi} |3\rangle) \otimes \chi.$$

Wieder kann man zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $4\phi \in \mathbf{Z}$, dann gilt

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} (|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{4} 4\phi} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{4} 2(4\phi)} |2\rangle + e^{\frac{2\pi i}{4} 3(4\phi)} |3\rangle) \otimes \chi = (\mathbf{F}_2 |4\phi\rangle) \otimes \chi.$$

Damit liefert



die beiden Dualbruchstellen hinter dem Komma von ϕ , die als Ergebnis einer Idealmessung Eigenwerte der Observablen

$$\sum_{k=0}^3 \frac{k}{4} |k\rangle\langle k| = \sum_{x_1, x_2=0}^1 0, x_1 x_2 |x_1 x_2\rangle\langle x_1 x_2|$$

erhalten werden.

2. Fall: $4\phi \notin \mathbf{Z}$, dann kann das Verfahren der Vergößerung des 1. Registers fortgesetzt werden, wie im folgenden gezeigt wird.

Dazu betrachten wir zunächst die Bauelemente. Die Induktionsannahme

$$N \text{ Stk.} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \boxed{U^{2^{N-1}}} \end{array} \right\} = \left(\oplus_1^{2^{N-1}} \mathbf{1}_{2^M} \oplus_1^{2^{N-1}} U^{2^{N-1}} \right) =: \mathbf{U}_{2^{N+M}}(U^{2^{N-1}}),$$

wobei die Blöcke wieder $2^M \times 2^M$ Matrizen sind, so dass das Gatter eine Transformation $\mathbf{U}_{2^{N+M}}(U^{2^{N-1}}) : \mathbf{C}^{2^{N+M}} \rightarrow \mathbf{C}^{2^{N+M}}$ erzeugt. Der Induktionsschluss folgt leicht, wenn man

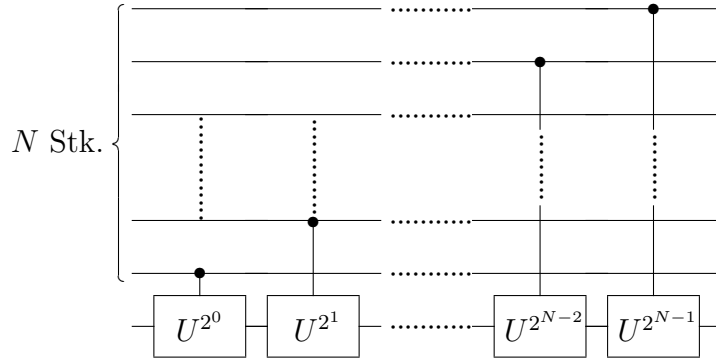
$$N+1 \text{ Stk.} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \boxed{U^{2^N}} \end{array} \right\} = N \text{ Stk.} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \boxed{U^{2^N}} \end{array} \right\}$$

betrachtet. Dann ist

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & & & \\ & 0 & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & \\ & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & 0 & \\ & & & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{2^{N+M}}(U^{2^N}) & & & \\ & \mathbf{U}_{2^{N+M}}(U^{2^N}) & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & & & \\ & 0 & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & \\ & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & 0 & \\ & & & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & & & \\ & 0 & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & \\ & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & 0 & \\ & & & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & & & \\ & \bigoplus_1^{2^{N-1}} U^{2^N} & & \\ & & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & \\ & & & \bigoplus_1^{2^{N-1}} U^{2^N} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & & & \\ & 0 & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & \\ & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & 0 & \\ & & & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & & & \\ & \mathbf{1}_{2^{N-1+M}} & & \\ & & \bigoplus_1^{2^{N-1}} U^{2^N} & \\ & & & \bigoplus_1^{2^{N-1}} U^{2^N} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2^{N+M}} & & & \\ & \bigoplus_1^{2^N} U^{2^N} & & \\ & & & \\ & & & \bigoplus_1^{2^N} U^{2^N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigoplus_1^{2^N} \mathbf{1}_{2^M} & & & \\ & \bigoplus_1^{2^N} U^{2^N} & & \\ & & & \\ & & & \bigoplus_1^{2^N} U^{2^N} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \bigoplus_1^{2^{(N+1)-1}} \mathbf{1}_{2^M} & & & \\ & \bigoplus_1^{2^{(N+1)-1}} U^{2^{(N+1)-1}} & & \\ & & & \\ & & & \bigoplus_1^{2^{(N+1)-1}} U^{2^{(N+1)-1}} \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{2^{(N+1)+M}}(U^{2^{(N+1)-1}}),
\end{aligned}$$

was die Induktionsannahme bestätigt.

Wir machen nun die Induktionsannahme, dass von



die durch die Blockdiagonalmatrix

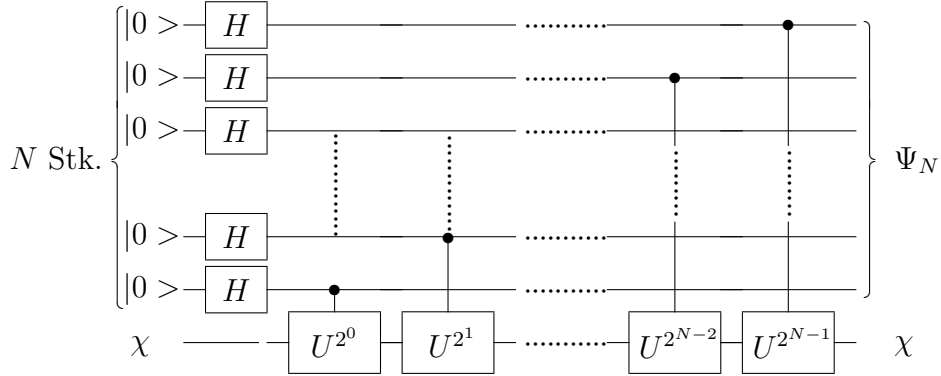
$$\text{diag}(\mathbf{1}_{2^M} U U^2 \dots U^{2^{N-2}} U^{2^{N-1}}) : \mathbf{C}^{2^{N+M}} \longrightarrow \mathbf{C}^{2^{N+M}}$$

dargestellte Transformation erzeugt wird. Diese Annahme wird durch

$$\begin{aligned} & \text{diag}(\mathbf{1}_{2^M} U U^2 \dots U^{2^{N-2}} U^{2^{N-1}} \mathbf{1}_{2^M} U U^2 \dots U^{2^{N-2}} U^{2^{N-1}}) \\ & \left(\begin{array}{c} \oplus_1^{2^N} \mathbf{1}_{2^M} \\ \oplus_1^{2^N} U^{2^N} \end{array} \right) \\ = & \text{diag}(\mathbf{1}_{2^M} U^{2^0} U^{2^1} \dots U^{2^{N-2}} U^{2^{N-1}} \\ & U^{2^N} U^{2^{N+1}} U^{2^{N+2}} \dots U^{2^{N+2^N-2}} U^{2^{N+2^N-1}}) \\ = & \text{diag}(\mathbf{1}_{2^M} U U^2 \dots U^{2^{N-2}} U^{2^{N-1}} \\ & U^{2^N} U^{2^{N+1}} U^{2^{N+2}} \dots U^{2^{N+1-2}} U^{2^{N+1-1}}) \end{aligned}$$

bestätigt. Bemerke, dass die Exponenten von U im Schaltkreis sich in jedem Schritt verdoppeln, aber in der darstellenden Diagonalmatrix durch die Folge $0, 1, 2, \dots, N-2, N-1$ gegeben sind.

Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich nun für den Schaltkreis



in gleicher Weise wie für $N = 2$, wobei hier zur Abkürzung $e_\phi := e^{2\pi i\phi}$ gesetzt ist und der invariante direkte Faktor χ in der Zeile der Basiselemente hinzugefügt wurde,

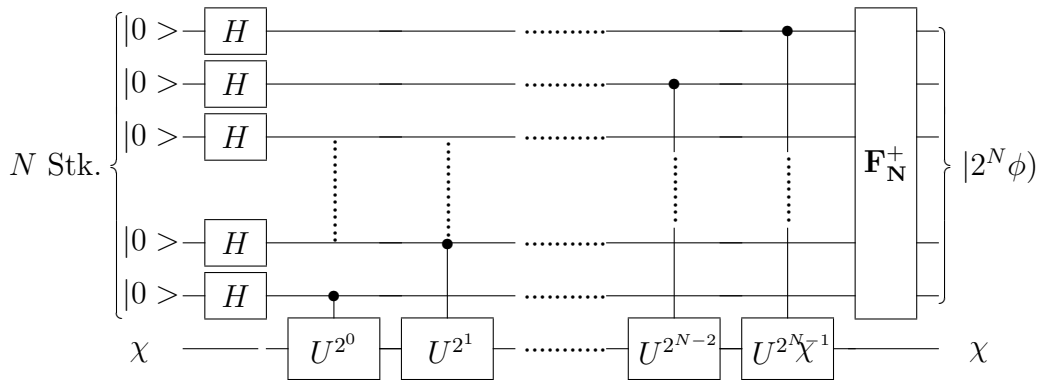
$$\begin{aligned}
 \Psi_N &= (|0\rangle \otimes \chi e_\phi |1\rangle \otimes \chi \dots e_\phi^{2^N-1} |2^N - 1\rangle \otimes \chi) H^{\otimes N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^N}} (|0\rangle \otimes \chi e_\phi |1\rangle \otimes \chi \dots e_\phi^{2^N-1} |2^N - 1\rangle \otimes \chi) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{k=0}^{2^N-1} e^{2\pi i k \phi} |k\rangle \otimes \chi.
 \end{aligned}$$

Wieder kann man zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $2^N \phi \in \mathbf{Z}$, dann ist

$$\Psi_N = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{k=0}^{2^N-1} e^{\frac{2\pi i}{2^N} k (2^N \phi)} |k\rangle = \mathbf{F}_N |2^N \phi\rangle,$$

und das Schltbild der Phasenbestimmung für diesen Fall



liefert $|2^N \phi\rangle$. Die Eigenwerte der Observablen des ersten Registers

$$\sum_{k=0}^{2^N-1} \frac{k}{2^N} |k\rangle\langle k| = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_{2^N}=0}^1 0, x_1 x_2 \dots x_{2^N} |x_1 x_2 \dots x_{2^N}\rangle\langle x_1 x_2 \dots x_{2^N}|,$$

sind die möglichen Werte von ϕ in diesem Fall. Das Ergebnis einer Messung dieser Observablen ist also die gesuchte Phase.

Der Fall 2 tritt stets ein, wenn die Phase irrational ist, aber auch, wenn die Qubitressourcen erschöpft sind.