Zusammenfassung der 16. Vorlesung (26.11.2010)

4.3 *Das "Entanglement of Formation"*:

Das Entanglement of Formation, das auf bipartite Systeme beschränkt ist, knüpft direkt an die Verschränktheit der partiellen Spur

$$E(\Psi) = S(\mathrm{tr}_2|\Psi >< \Psi|) = -\sum_i c_i^2 \log_2 c_i^2,$$

wobei c_i die Schmidt Koeffizienten sind von Ψ sind, an. Es ist als das Infimum der mittleren Verschränktheit der partiellen Spur unter allen reinen Zerlegungen des gegebenen Dichteoperators ρ definiert:

$$E_f(\rho) = \inf\{\sum_i p_i E(\Psi_i)|\rho = \sum_i p_i|\Psi_i >< \Psi|\}.$$

Man folgert unmittelbar, dass die ersten zwei Forderungen, $E_f(\rho) \geq 0$, $E_f(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathcal{D}$, und $E_f((U_1 \otimes U_2)\rho(U_1^+ \otimes U_2^+)) = E_f(\rho)$ erfüllt sind. Dass die dritte Forderung, $E_f((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho) \leq E_f(\rho)$, auch erfüllt ist, sieht man nicht unmittelbar, denn

$$\begin{aligned}(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)|\Psi_i >< \Psi_i| &= \sum_{k,l}(A_k \otimes B_l)|\Psi_i >< \Psi_i|(A_k^+ \otimes B_l^+) \\ &= \sum_{k,l} q_{k,l}^{(i)}|\Phi_{k,l}^{(i)} >< \Phi_{k,l}^{(i)}|,\end{aligned}$$

wobei $\sum_k A_k^+ A_k = \mathbf{1}$, $\sum_k B_k^+ B_k = \mathbf{1}$ und

$$q_{k,l}^{(i)} = \|(A_k \otimes B_l)|\Psi_i > \|^2, \quad |\Phi_{k,l}^{(i)} >= \frac{1}{\|(A_k \otimes B_l)|\Psi_i > \|}(A_k \otimes B_l)|\Psi_i >$$

sind, ist kein reiner Zustand. Es gilt jedoch das Nielsensche Theorem:

Satz (Nielsen): Eine Operation $\mathcal{J}$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{J}|\psi >< \psi| = \sum_j q_j|\varphi_j >< \varphi_j|$$

existiert genau dann, wenn

$$E(\psi) \geq \sum_j q_j E(\varphi_j).$$

Wir werden dieses Theorem später beweisen. Hier folgern wir daraus, dass für jede reine Zerlegung von ρ

$$(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho = (\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2) \sum_i p_i |\Psi_i >< \Psi_i| = \sum_i p_i \sum_{k,l} q_{k,l}^{(i)} |\Phi_{k,l}^{(i)} >< \Phi_{k,l}^{(i)}|$$

eine reine Zerlegung von $(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho$ ist, für die

$$\sum_i p_i E(\Psi_i) \geq \sum_i p_i \sum_{k,l} q_{k,l}^{(i)} E(\Phi_{k,l}^{(i)})$$

gilt. Daraus folgt aber $E_f(\rho) \geq E_f((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho)$, so dass die dritte Forderung auch erfüllt wird.

Die reinen Zerlegungen eines Zustandsgemisches werden durch das folgende Theorem charakterisiert:

Satz: (a) Sei $\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i >< \psi_i|$ eine Zerlegung in (nicht notwendig orthogonale) reine Zustände, $\|\psi_i\| = 1$. Sind dann $u_{ik} \in \mathbf{C}$, $(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m \geq n)$ mit

$$\sum_k \overline{u}_{ik} u_{jk} = \delta_{ij}, \quad \text{und ist} \quad \sqrt{q_k}\varphi_k := \sum_i u_{ik}\sqrt{p_i}\psi_i, \quad \|\varphi_i\| = 1,$$

dann gilt

$$\sum_k q_k |\varphi_k >< \varphi_k| = \sum_{kij} u_{ik}\overline{u}_{jk}\sqrt{p_i p_j} |\psi_i >< \psi_j| = \sum_i p_i |\psi_i >< \psi_i| = \rho.$$

(b) Ist umgekehrt $\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i >< \psi_i| = \sum_k^m q_k |\varphi_k >< \varphi_k|$ und (o.B.d.A.) $m \geq n$, dann existieren Zahlen $u_{ik} \in \mathbf{C}$, $(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m)$ mit

$$\sum_k \overline{u}_{ik} u_{jk} = \delta_{ij}, \quad \text{und} \quad \sqrt{q_k}\varphi_k = \sum_i u_{ik}\sqrt{p_i}\psi_i.$$

Die Formulierung dieses Theorems wird besonders einfach und leicht zu merken, wenn man anstelle der normierten ψ_i und φ_k die nicht normierten Vektoren

$$\tilde{\psi}_i := \sqrt{p_i}\psi_i \qquad \text{und} \qquad \tilde{\varphi}_k := \sqrt{q_k}\varphi_k$$

verwendet. Dann ist

$$(\clubsuit) \qquad \rho = \sum_{i=1}^{n} |\tilde{\psi}_i >< \tilde{\psi}_i| \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{n} \|\tilde{\psi}_i\|^2 = 1,$$

und ferner sei

$$(\spadesuit) \qquad \sigma := \sum_{k=1}^{m} |\tilde{\varphi}_k >< \tilde{\varphi}_k| \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=k}^{m} \|\tilde{\varphi}_k\|^2 = 1.$$

Überdies lassen sich die n paarweise orthomormalen m-Tupel u_{ik}, die die Zeilen der rechteckigen $(m \times n)$-Matrix bilden, so ergänzen, dass die u_{kl} eine unitäre $(m \times m)$-Matrix bilden. Der Satz lässt sich dann in der folgenden Form behapten:

Satz: Seien ρ und σ Dichteoperatoren mit den reinen Zerlegungen ($\clubsuit$) bzw. ($\spadesuit$), $m \geq n$, auf einem Hilbertraum endlicher Dimensuion. .Es gilt $\rho = \sigma$ genau dann, wenn es eine unitäre $(m \times m)$-Matrix u_{kl} mit

$$\tilde{\varphi}_k = \sum_{i=1}^{n} u_{ki} \tilde{\psi}_i \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

gibt.

Beweis: *Die Bedingung ist hinreichend*, denn

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} |\tilde{\varphi}_k >< \tilde{\varphi}_k| &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} u_{ki} \overline{u}_{kj} |\tilde{\psi}_i >< \tilde{\psi}_j| = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{kj} |\tilde{\psi}_i >< \tilde{\psi}_j| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta_{kj} |\tilde{\psi}_i >< \tilde{\psi}_i.| \end{aligned}$$

Die Bedingung ist notwendig: Sei für

$$\rho = \sigma := \sum_{h=1}^{r} |\tilde{\phi}_h >< \tilde{\phi}_h| \text{ mit } \sum_{i=h}^{r} \|\tilde{\phi}_h\|^2 = 1 \text{ und } < \tilde{\phi}_g | \tilde{\phi}_h >= \|\tilde{\phi}_h\|^2 \delta_{gh}$$

die eindeutige Spektralzerlegung, dann gilt sowohl $m \geq r$ als auch $n \geq r$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $|\tilde{\phi}_h\| > 0$

für $h = 1, 2, 3, \ldots, r$. Dann spannen die orthogonalen $\tilde{\phi}_h$ den Träger von $\rho = \sigma$ auf und es gelten

$$\tilde{\varphi}_k = \sum_{h=1}^{r} v_{kh}\tilde{\phi}_h \qquad \text{und} \qquad \tilde{\psi}_i = \sum_{h=1}^{r} w_{ih}\tilde{\phi}_h,$$

somit auch

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} \sum_{h,g=1}^{r} v_{kg}\overline{v}_{kh}|\tilde{\phi}_g >< \tilde{\phi}_h| = \sum_{h=1}^{r} |\tilde{\phi}_h >< \tilde{\phi}_h|$$

sowie

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h,g=1}^{r} w_{ig}\overline{w}_{ih}|\tilde{\phi}_g >< \tilde{\phi}_h| = \sum_{h=1}^{r} |\tilde{\phi}_h >< \tilde{\phi}_h|.$$

Da die $|\tilde{\phi}_g >< \tilde{\phi}_h|$ eine Basis im Vektorraum der linearen Operatoren auf dem Träger von $\rho = \sigma$ bilden, erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$\sum_{k=1}^{m} v_{kg}\overline{v}_{kh} = \delta_{gh} \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} w_{ig}\overline{w}_{ih} = \delta_{gh}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_{ig}\tilde{\psi}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} \overline{w}_{ig}w_{ih}\tilde{\phi}_h = \sum_{h=1}^{r} \delta_{gh}\tilde{\phi}_h = \tilde{\phi}_g,$$

und damit

$$\tilde{\varphi}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} v_{kh}\overline{w}_{ih}\tilde{\psi}_i.$$

Sei nun $\tilde{v}_{kl}$ eine unitäre $(m\times m)$-Matrix, deren erste r Spalten mit den Spalten von v_{kh} übereinstimmen Ferner sei $\tilde{w}_{kl}$ eine unitäre $(m \times m)$-Matrix, die surch die direkte Summe einer $(n \times n)$-Matrix, deren erste k Spalten mit denen von w_{ih} übereunstimmen, und der Einheitsmatrix in $(m - n)$ Dimensionen, d.h. für $k, l > n$ ist $\tilde{w}_{kl} = \delta_{kl}$. Dann gelten die vorstehenden Beziehungen auch mit $\tilde{v}_{kl}$ und $\tilde{w}_{kl}$ anstelle von v_{kh} und w_{ih}. Die Summationen können aber nun alle bis m laufen. Neben

$$\sum_{k=1}^{m} \tilde{w}_{kl}\overline{\tilde{w}}_{kl'} = \delta_{ll'} \qquad \text{gilt nun auch} \qquad \sum_{l=1}^{m} \tilde{w}_{kl}\overline{\tilde{w}}_{ik'l} = \delta_{kk'}.$$

Setzt man $\tilde{\psi}_l = 0$ für $l > n$ und $\tilde{\phi}_l = 0$ für $l > r$, dann gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\overline{w}}_{kl} \tilde{\psi}_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l'=1}^{m} \overline{\overline{w}}_{kl} \tilde{w}_{kl'} \tilde{\phi}_{l'} = \sum_{l'=1}^{m} \delta_{ll'} \tilde{\phi}_l' = \tilde{\phi}_l,$$

und damit

$$\tilde{\varphi}_k = \sum_{l=1}^{m} \sum_{l'=1}^{m} \tilde{v}_{kl'} \overline{\overline{w}}_{ll'} \tilde{\psi}_l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l'=1}^{m} \tilde{v}_{kl'} \overline{\overline{w}}_{il'} \tilde{\psi}_i.$$

Die unitäre Matrix

$$u_{kl} := \sum_{l'=1}^{m} \tilde{v}_{kl'} \overline{\overline{w}}_{ll'},$$

von der nur die ersten n Spalten benötigt werden, leistet also das Gewünschte. Damit ist auch die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen.

Das Problem bei der Berechnung des Entanglement of Formation besteht in der Bestimmung der optimalen reinen Zerlegung, die den Erwartungswert $\sum_i p_i E(\Psi_i)$ minimal macht Für bipartite Zustände von Qubits lässt sich die Berechnung des Entanglement of Formation auf die Bestimmung der Eigenwerte einer hermiteschen (4×4)-Matrix zurückführen (Wootters-Formel), wie im Folgenden gezeigt wird.