

Zusammenfassung der 17. Vorlesung (10.12.2010)

4.3 Das “Entanglement of Formation” (Fortsetzung):

Als “**Concurrence Function**” $C : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ bezeichnet man eine Funktion, wenn für $\Psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$$E(\Psi) = F \circ C(\Psi)$$

mit einer monoton wachsenden und strikt konvexen Funktion $F : \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ gilt. Für jede reine Zerlegung eines Dichteoperators, $\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$ gilt dann

$$F\left(\sum_i p_i C(\Psi_i)\right) \leq \sum_i p_i F \circ C(\Psi_i) = \sum_i p_i E(\Psi_i),$$

und die Gleichheit gilt genau dann, wenn ρ rein ist oder die “Concurrences” der reinen Komponenten übereinstimmen, d.h. $C(\Psi_i) = C(\Psi_k)$ gilt. Solche Zerlegungen von ρ sind also gute Kandidaten für eine optimale Zerlegung mit $E_f(\rho) = \sum_i p_i E(\Psi_i)$.

4.3.1 Das “Entanglement of Formation” für bipartite Qubitzustände, die Wootters Formel:

Für reine Qubitzustände lässt sich eine “Concurrence” Funktion leicht konstruieren. Es gilt ja

$$\Psi = \sum_{x,y=0}^1 \alpha_{xy} |xy\rangle = \sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \otimes \psi_i, \quad c_1 \geq c_2 \geq 0$$

wobei sich die Orthonormalbasen $\{\varphi_i\}$ und $\{\psi_i\}$ aus der Computerbasis durch unitäre Transformationen ergeben.

$$C(\Psi) := 2|\det \alpha_{xy}| = 2c_1 c_2, \quad 0 \leq C(\Psi) \leq 1$$

hat die Eigenschaften einer “Concurrence” Funktion. Wegen $1 = c_1^2 + c_2^2$ folgt

$$1 - (c_1^2 - c_2^2)^2 = 4c_1^2 c_2^2 = C^2(\Psi),$$

und damit

$$\sqrt{1 - C^2(\Psi)} = c_1^2 - c_2^2 = 2c_1^2 - 1 = 1 - 2c_2^2,$$

also

$$c_1^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - C^2(\Psi)}), \quad c_2^2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - C^2(\Psi)}).$$

Folglich gilt

$$E(\Psi) = -(c_1^2 \log_2 c_1^2 + c_2^2 \log_2 c_2^2) = F \circ C(\Psi)$$

mit

$$F(x) = - \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - x^2}) \log_2 \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - x^2}) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - x^2}) \log_2 \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - x^2}) \right).$$

Zu zeigen bleibt, dass F monoton wachsend und strikt konvex ist. Sei

$$f(y) = -\left(\frac{1}{2}(1 + y) \log_2 \frac{1}{2}(1 + y) + \frac{1}{2}(1 - y) \log_2 \frac{1}{2}(1 - y)\right),$$

dann ist mit $y = \sqrt{1 - x^2}$ für $x \in (0, 1)$

$$F'(x) = f'(y)y' = -\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \log_2 \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} > 0,$$

also ist F monoton wachsend. Ferner ist

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{y} \log_2 \frac{1 + y}{1 - y} + \frac{x}{2} \left(\frac{1}{y} \log_2 \frac{1 + y}{1 - y} \right)' y' = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{y^3} \left(\ln \frac{1 + y}{1 - y} - y \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2 y^3} \left(2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{2k - 1} y^{2k-1} - y \right) \geq \frac{1}{\ln 2 y^3} (2y - y) = \frac{1}{2 \ln 2} \frac{1}{y^2} \\ &= \frac{1}{2 \ln 2} \frac{1}{1 - x^2} > 0. \end{aligned}$$

Also ist F auch strikt konvex. Somit ist C eine ‘‘Concurrence’’ Funktion.

Diese ‘‘Concurrence’’ Funktion kann auch auf eine andere Weise dargestellt werden: Eine Komplexkonjugation auf einem Hilbertraum ist ein Operator

$I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, für den $I^2 = \mathbf{1}$ und $\langle I\varphi|I\psi \rangle = \langle \psi|\varphi \rangle$ gilt. Solch eine Transformation ist antilinear, denn für beliebiges φ gilt

$$\begin{aligned} \langle \varphi|I(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) \rangle &= \langle I^2\varphi|I(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) \rangle = \\ \langle (c_1\psi_1 + c_2\psi_2)|I\varphi \rangle &= \bar{c}_1 \langle \psi_1|I\varphi \rangle + \bar{c}_2 \langle \psi_2|I\varphi \rangle = \\ \bar{c}_1 \langle \varphi|I\psi_1 \rangle + \bar{c}_2 \langle \varphi|I\psi_2 \rangle &= \langle \varphi|(\bar{c}_1 I\psi_1 + \bar{c}_2 I\psi_2) \rangle . \end{aligned}$$