

Zusammenfassung der 18. Vorlesung (13.12.2010)

4.3 Das “Entanglement of Formation” (2.Fortsetzung):

Ist $\{\varphi_i\}$ eine vollständige Orthonormalbasis in \mathcal{H} , dann ist

$$I : \psi = \sum_i c_i \varphi_i \quad \mapsto \quad \bar{\psi} = \sum_i \bar{c}_i \varphi_i$$

eine Komplexkonjugation, denn neben $I^2 = 1$ gilt mit $\chi = \sum_i d_i \varphi_i$ auch

$$\langle I\psi, I\chi \rangle = \sum_i c_i \bar{d}_i = \langle \chi, \psi \rangle .$$

Umgekehrt gibt es zu jeder Komplexkonjugation eine Klasse von Orthonormalbasen mit dieser Eigenschaft.

Wir betrachten nun in \mathbf{C}^2 die dergestalt auf die Basis $|0\rangle, |1\rangle$ bezogene Komplexkonjugation. Dann gilt für jedes $\psi \in \mathcal{C}^2$ mit $\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

$$\langle \psi, \sigma_2 I \psi \rangle = i(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}) = 0 .$$

Da ψ Eigenvektor zu einer bestimmten Spinprojektion ist, bedeutet

$$\psi \mapsto \tilde{\psi} := \sigma_2 I \psi$$

die Umkehr dieses Spins. Diese Operation heißt deshalb **spin-flip**. Überdies gilt offenbar $\|\psi\| = \|\tilde{\psi}\|$. Jeder bipartite Qubit Zustand kann deshalb in Schmidtdarstellung als

$$\Psi = c_1 \varphi \otimes \psi + c_2 (e^{i\delta} \tilde{\varphi}) \otimes \tilde{\psi}$$

geschrieben werden. Aufgrund der Antilinearität von I ist $\sigma_2 I = -I \sigma_2$, so dass $\sigma_2 I \sigma_2 I = -\sigma_2^2 I^2 = -1$ ist. Die concurrence-function des reinen Zustands Ψ kann deshalb mit

$$\tilde{\Psi} := (\sigma_2 I \otimes \sigma_2 I) \Psi = c_1 \tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi} + c_2 (e^{-i\delta} \varphi) \otimes \psi .$$

durch

$$C(\Psi) = |\langle \Psi, \tilde{\Psi} \rangle| = \text{tr}(|\langle \Psi, \tilde{\Psi} \rangle| |\Psi\rangle\langle\Psi|)$$

ausgedrückt werden. Den letzten Ausdruck kann man noch geeignet umformen, so dass er auch für Dichteoperatoren Sinn macht:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(|\langle \Psi, \tilde{\Psi} \rangle| |\Psi\rangle\langle\Psi|) &= \text{tr}(\sqrt{\langle \Psi, \tilde{\Psi} \rangle\langle \tilde{\Psi}|\Psi\rangle} |\Psi\rangle\langle\Psi|) \\
&= \text{tr}(\sqrt{\langle \Psi, \tilde{\Psi} \rangle\langle \tilde{\Psi}|\Psi\rangle} |\Psi\rangle\langle\Psi|) \\
&= \text{tr}(\sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi|\tilde{\Psi}\rangle\langle\tilde{\Psi}|\Psi\rangle} |\Psi\rangle\langle\Psi|) \\
&= \text{tr}(\sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi||\tilde{\Psi}\rangle\langle\tilde{\Psi}|\Psi\rangle} |\Psi\rangle\langle\Psi|) \\
&= \text{tr}(\sqrt{\sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi|}|\tilde{\Psi}\rangle\langle\tilde{\Psi}|\sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi|}}).
\end{aligned}$$

In den letzten beiden Gliedern der Gleichungskette stehen nur die Dichteoperatoren der reinen Zustände Ψ und $\tilde{\Psi}$, und der Eigenwert des hermiteschen Operators $\sqrt{\sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi|}|\tilde{\Psi}\rangle\langle\tilde{\Psi}|\sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi|}}$ vom Rang 1 ist $C(\Psi)$. Dies motiviert für gemischte Zustände die Abbildung

$$\rho = \sum_i p_i |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i| \quad \mapsto \quad \tilde{\rho} = \sum_i p_i |\tilde{\Phi}\rangle\langle\tilde{\Phi}|$$

und den positiven hermiteschen Operator

$$R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}}.$$

zu definieren. Tatsächlich bestimmen die Eigenwerte von $R(\rho)$ das entanglement of formation von ρ . Wir zeigen zunächst, dass jeder Dichteoperator ρ von $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ eine reine Zerlegung $\rho = \sum_i q_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$ mit $C(\Psi_i) = C(\Psi_j) = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ hat, wobei λ_k die Eigenwerte von $R(\rho)$ sind, unter denen λ_0 der größte ist. Dann zeigen wir, dass solche Zerlegungen optimal sind.