Zusammenfassung der 19. Vorlesung (17.12.2010)

4.3 *Das "Entanglement of Formation" (3.Fortsetzung)*:

Lemma: Sei ρ ein Dichteoperator auf $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien λ_i, $i = 0, 1.2, 3$, $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Sei dann $\mathcal{C}(\rho) := \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 > 0$, dann gibt es eine reine Zerlegung $\rho = \sum_i s_i |\Upsilon_i >< \Upsilon_i|$ mit $C(\Upsilon_i) = \mathcal{C}(\rho)$.

Beweis: Seien

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} p_i |\Phi_i >< \Phi_i|, \qquad R(\rho) = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i |\Sigma_i >< \Sigma_i|$$

die Spektralzerlegungen und U der durch $U\Sigma_i = \Phi_i$ definierte unitäre Operator. D.h. es gilt $U_{il} :=< \Phi_i, U\Phi_l >= \overline{< \Phi_l, U^+\Phi_i >} =< \Sigma_i, \Phi_l >$ und

$$UR(\rho)U^+ = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i |\Phi_i >< \Phi_i|.$$

Die Matrizen ρ und $UR(\rho)U^+$ haben also dieselben Eigenvektoren, sodass die λ_i Funktionen der p_i sind. Wir zeigen nunm dass die Matrix $UR(\rho)U^+$ in der Form $UR(\rho)U^+ = \sqrt{TT^+}$ dargesttellt werden kann, wobei T in der Basis ϕ_i eine symmetrische Matrix ist. Dazu betrachten wir die folgende Zerlegung von ρ in reine Komponenten, die durch

$$\sqrt{q_k}\Psi_k := \sum_{l=0}^{3} \overline{U}_{kl} \sqrt{p_l} \Phi_l, \quad \text{und mithin} \quad \sqrt{q}_k \tilde{\Psi}_k := \sum_{l=0}^{3} U_{kl} \sqrt{p_l} \tilde{\Phi}_l,$$

gegeben ust, weil $\sigma_2 I \otimes \sigma_2 I$ eine antilineare Transformation ist. Damit ist dann

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} q_i |\Psi_i >< \Psi_i|, \quad \text{und} \quad \tilde{\rho} = \sum_{i=0}^{3} q_i |\tilde{\Psi}_i >< \tilde{\Psi}_i|.$$

zur Darstellubg von $UR(\rho)U^+$ verwenden wir ρ in der Spektraldarstellung und $\tilde{\rho}$ in der alternativen Zerlegung.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{3} \lambda_i^2 |\Phi_i >< \Phi_i| = UR^2(\rho)U^+ = U\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}U^+ \\
= & \sum_{i,k,n} U\sqrt{q_i q_n}|\Psi_i >< \Psi_i|\tilde{\Psi}_n >< \tilde{\Psi}_n|\Psi_k >< \Psi_k|\sqrt{q_n q_k}U^+ \\
= & \sum_{i,k,n} U\sqrt{p_i q_n}|\Phi_i >< \Phi_i|\tilde{\Psi}_n >< \tilde{\Psi}_n|\Phi_k >< \Phi_k|\sqrt{q_n p_k}U^+ \\
= & \sum_{i,k,n}\sum_{m,m'} |\Phi_m > \sqrt{q_n} < \overline{U}_{mi}\sqrt{p_i}\Phi_i|\tilde{\Psi}_n >< \tilde{\Psi}_n|\overline{U}_{m'k}\sqrt{p_k}\Phi_k > \sqrt{q_n} < \phi_{m'}| \\
= & \sum_{n}\sum_{m,m'} |\Phi_m > \sqrt{q_n q_m} < \Psi_m|\tilde{\Psi}_n >< \tilde{\Psi}_n|\Psi'_m > \sqrt{q_n q_{m'}} < \phi_{m'}|.
\end{aligned}
$$

Mit

$$T := \sum_{l,m} |\phi_l > \sqrt{q_l q_m} < \Psi_l|\tilde{\Psi}_m >< \Phi_m|$$

ist also

$$UR^2(\rho)U^+ = TT^+ = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i^2 |\Phi_i >< \Phi_i|$$

und

$$UR(\rho)U^+ = \sqrt{TT^+} = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i |\Phi_i >< \Phi_i|.$$

Der Koeffizientenvergleich bezüglich der =Operatorbasis Liefert

$$\lambda_j^2 \delta_{jl} = \left(\sum_m q_j q_m | < \Psi_j|\tilde{\Psi}_m > |^2 \right) \delta_{jl},$$

womit auch die funktionale Abhängigkeit der λ_i von den q_m bestimmt ist. Die Symmetrie von T in der Eigenbasis von ρ folgt aus

$$
\begin{aligned}
< \Psi_i|\tilde{\Psi}_k > &= < \Psi_i|(\sigma_2 \otimes \sigma_2)(I \otimes I)\Psi_k >=< (\sigma_2 \otimes \sigma_2)\Psi_i|(I \otimes I)\Psi_k > \\
&= < (I \otimes I)^2(\sigma_2 \otimes \sigma_2)\Psi_i|(I \otimes I)\Psi k >=< \Psi_k|(I \otimes I)(\sigma_2 \otimes \sigma_2)\Psi_i > \\
&= < \Psi_k|(\sigma_2 \otimes \sigma_2)(I \otimes I)\Psi_i >=< \Psi_k|\tilde{\Psi}_i > .
\end{aligned}
$$

Wir verwenden nun folgenden Satz aus der Matrizenalgebra:

Satz: *Sei T_{jk} eine komplexe $(N \times N)$-Matrix und $T_{jk} = T_{kj}$, dann gibt es eine unitäre Matrix V_{ij} mit $\sum_{jk} V_{ij} T_{jk} V_{lk} = (\sqrt{TT^+})_{il}$.*

Mit der auf die Basis $\{\Phi_i\}$ bezogenen Transposition gilt also

$$UR(\rho)U^+ = \sqrt{TT^+} = VTV^T = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i |\Phi_i >< \Phi_i|.$$

Wir ändern nun die Zerlegung von ρ in reine Komponenten mit der unitären Matrix V

$$\sqrt{r_k}\Theta_k := \sum_{l=0}^{3} \overline{V_{kl}} \sqrt{q_l} \Psi_l, \quad \text{und mithin} \quad \sqrt{r_k}\tilde{\Theta}_k := \sum_{l=0}^{3} V_{kl} \sqrt{q_l} \tilde{\Psi}_l.$$

Dann ist

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} r_i |\Theta_i >< \Theta_i|$$

und für die reinen Komponenten Θ_k gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{r_i r_k} < \Theta_i | \tilde{\Theta}_k > &= \sum_{jl} V_{ij} V_{kl} \sqrt{q_j q_l} < \Psi_j | \tilde{\Psi}_l > \\ &= \sum_{jl} V_{ij} T_{jl} V_{kl} = \sqrt{TT^+}_{ik} = \lambda_i \delta_{ik}. \end{aligned}$$

und

$$\sum_i r_i < \Theta_i | \tilde{\Theta}_i >= \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Nun verwenden wir die unitäre Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -i & & \\ & & -i & \\ & & & -i \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} \sqrt{r_0}\,\Xi_0 \\ \sqrt{r_1}\,\Xi_1 \\ \sqrt{r_2}\,\Xi_2 \\ \sqrt{r_3}\,\Xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & i & & \\ & & i & \\ & & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{r_0}\,\Theta_0 \\ \sqrt{r_1}\,\Theta_1 \\ \sqrt{r_2}\,\Theta_2 \\ \sqrt{r_3}\,\Theta_3 \end{pmatrix},$$

dann gilt ebenfalls $< \Xi_i, \Xi_k >=< \Xi_i, \Xi_i > \delta_{ik}$ und ρ hat die reine Zerlegung

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} r_i |\Xi_i >< \Xi_i|,$$

aber nun gilt

$$\begin{aligned} \sum_i r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > &= r_0 < \Theta_0|\tilde{\Theta}_0 > + \sum_{\nu=1}^{3} r_\nu (-i)^2 < \Theta_\nu|\tilde{\Theta}_\nu > \\ &= \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = \mathcal{C}(\rho) \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Für die Vergleichsfunktionen gilt

$$C(\Theta_k) = | < \Theta_k, \tilde{\Theta}_k > | = | < \Xi_k, \tilde{\Xi}_k > | = C(\Xi_k), \quad \text{aber} \quad C(\Xi_k) \neq C(\Xi_l)$$

im Allgmeinen. Unter der Voraussetzung $\mathcal{C}(\rho) > 0$ suchen wir eine reine Zerlegung

$$\rho = \sum_i s_i |\Upsilon_i >< \Upsilon_i| \quad \text{mit} \quad C(\Upsilon_i) = \mathcal{C}(\rho).$$

Die Gleichungen

$$\sqrt{s_j}\Upsilon_j = \sum_{i=0}^{3} \overline{W}_{ji} \sqrt{r_i} \Xi_i, \qquad \sum_{j=0}^{3} W_{ji} \overline{W}_{jk} = \delta_{jk}$$

mit den Unbestimmten W_{jk} führen unter Beachtung von $< \Xi_i, \Xi_k >=$
$< \Xi_i, \Xi_i > \delta_{ik}$ auf

$$s_i < \Upsilon_i|\tilde{\Upsilon}_i >= \sum_{j,k} W_{ij} W_{ik} \sqrt{r_j r_k} < \Xi_j|\tilde{\Xi}_k >= \sum_j W_{ij}^2 r_j < \Xi_j|\tilde{\Xi}_j > .$$

Unter der Voraussetzung $\mathcal{C}(\rho) > 0$ und den Forderungen $C(\Upsilon_i) = \mathcal{C}(\rho)$ lauten die Bestimmungsgleichungen für die W_{ij}

$$s_i \frac{< \Upsilon_i|\tilde{\Upsilon}_i >}{\mathcal{C}(\rho)} = \sum_j W_{ij}^2 \frac{r_j < \Xi_j|\tilde{\Xi}_j >}{\mathcal{C}(\rho)},$$

oder

$$s_i \epsilon_i = \sum_j (W_{ij})^2 f_j, \quad \text{wobei} \quad \epsilon_i := \frac{< \Upsilon_i|\tilde{\Upsilon}_i >}{\mathcal{C}(\rho)} = \pm 1, \ f_j = \frac{r_j < \Xi_j|\tilde{\Xi}_j >}{\mathcal{C}(\rho)}.$$

Die Vorgaben f_i erfüllen wegen $\clubsuit$ $\sum_j f_j = 1, \ f_0 \geq 0, \ f_\nu \leq 0$. Ferner ist $\sum_i s_i = 1, \ s_i \geq 0$. Über die ϵ_i können wir frei verfügen, lassen sich doch wie beim Übergang von den Θ_i zu den Ξ_i durcch eine unitäre Matrix rein imagienäre Phasen einführen, die das Signum von ϵ_i ändern. Wir wählen $\epsilon_i = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehman wir an, dass $s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq s_3$ und $f_0 \geq f_1 \geq f_2 \geq f_3$ ist. Unter Voraussetzung dieser Ungleichungen ist

$$\{f_j\} \succ \{s_i\} \Leftrightarrow: \left\{ \begin{array}{rcl} f_0 & \geq & s_0 \\ f_0 + f_1 & \geq & s_0 + s_1 \\ f_0 + f_1 + f_2 & \geq & s_0 + s_1 + s_2 \\ f_0 + f_1 + f_2 + f_3 & \geq & s_0 + s_1 + s_2 + s_3 \end{array} \right. .$$

Aus

$$f_0 - |f_1| - |f_2| - |f_3| = 1 = s_0 + s_1 + s_2 + s_3$$

folgen diese vier Ungleichungen für die Vorgaben der Bestimmungsgleichung sofort und der folgende Satz aus der Matrixalgebra ist anwendbar.

***Satz**: Seien $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$, $\{y_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$, $x_i, y_j \in \mathbf{R}$, und $\{x_i\} \prec \{y_j\}$, dann gibt es eine doppelt stochastische $(n \times n)$-Matrix D, d.h. $D_{ij} \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n D_{ij} = \sum_{j=1}^n D_{ij} = 1$, mit $x_i = \sum_j D_{ij} y_j$. und $D_{ij} = W_{ij}^2$, wobei W_{ij} eine Orthogonalmatrix ist.*

Dieser Satz behauptet also die Existenz der gesuchten unitären Matrix, die sogar eine Orthogonalmatrix ist, und $s_i = \sum_j W_{ij}^2 f_j$ erfüllt, so dass mit

$$\sqrt{s_j}\Upsilon_j = \sum_{i=0}^{3} W_{ji}\sqrt{r_i}\Xi_i, \qquad \rho = \sum_i s_i|\Upsilon_i >< \Upsilon_i|$$

und $\epsilon_i = 1$ die im Lemma behauptete reine Zerlegung mit

$$\mathcal{C}(\rho) =< \Upsilon\tilde{\Upsilon}_i >= | < \Upsilon\tilde{\Upsilon}_i > | = C(\Upsilon_i) = \sum_i s_i C(\Upsilon_i)$$

ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

Für das Folgende halten wir fest, dass wir die Vorausstzung $\mathcal{C}(\rho) > 0$ zur Herleitung der Zerlegung

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} r_i|\Theta_i >< \Theta_i| \quad \text{mit} \quad \sqrt{r_i r_k} < \Theta_i|\tilde{\Theta}_k >= \lambda_i \delta_{ik}$$

nicht benötigt haben. Wir werden die Existenz einer solchen Zerlegung noch verwenden.

Korollar: Sei ρ ein Dichteoperator auf $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien λ_i, $i = 0, 1.2, 3$, $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Dann gibt es eine reine Zerlegung $\rho = \sum_{i=0}^{3} r_i |\Theta_i >< \Theta_i|$ mit $\sqrt{r_i r_k} < \Theta_i|\tilde{\Theta}_k >= r_i < \Theta_i|\tilde{\Theta}_i >= \lambda_i \delta_{ik}$.