

Zusammenfassung der 2. Vorlesung (19.04.2010)

1. Klassische Information und Quanteninformation (Fortsetzung)

Man überlegt sich damit leicht, dass der Erwartungswert von A für einen reinen Zustand ψ in der Form

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle = \text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|A)$$

geschrieben werden kann. Der Erwartungswert ist asymptotisch durch den Grenzwert des Mittelwertes für unendlich lange Versuchsreihen definiert. Man denke sich nun eine Versuchsreihe, in der A gemessen wird, wobei der Bruchteil α , $0 < \alpha < 1$ der Versuche mit dem reinen Zustand ψ , und der Bruchteil $1 - \alpha$ mit dem reinen Zustand φ durchgeführt wird. Mit welchem der beiden Zustände die einzelnen Versuche durchzuführen sind, mag ein geeigneter Zufallsgenerator vorschreiben. Ist K das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von α und β und ist W_n der Wert, der sich für A beim n -ten Versuch ergibt, dann ist der Mittelwert nach GN Versuchen

$$\frac{1}{GN} \sum_{n=1}^{GN} W_n = \alpha \frac{1}{\alpha GN} \sum_{n=1}^{\alpha GN} W'_n + \beta \frac{1}{\beta GN} \sum_{n=1}^{\beta GN} W''_n,$$

wobei W'_n Messwerte sind, die mit dem Zustand ψ erhalten wurden, und W''_n solche sind, die mit dem Zustand φ erhalten wurden. Obwohl unbekannt sein kann, welche Messung mit dem einen, und welche Messung mit dem anderen erfolgt ist, muss diese Gleichung gelten. Für den Grenzwert $N \rightarrow \infty$ gilt damit

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \alpha \langle A \rangle_\psi + \beta \langle A \rangle_\varphi \\ &= \alpha \langle \psi, A\psi \rangle + \beta \langle \varphi, A\varphi \rangle \\ &= \alpha \text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|A) + \beta \text{tr}(|\varphi\rangle\langle\varphi|A) \\ &= \text{tr}((\alpha|\psi\rangle\langle\psi| + \beta|\varphi\rangle\langle\varphi|)A). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile der Gleichungskette ist der Zustand, der sich aus der operationalen Vorschrift zur statistischen Mischung der reinen Zustände $|\psi\rangle\langle\psi|$ und $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ ergibt, durch den ‘Dichteoperator’

$$\rho = \alpha|\psi\rangle\langle\psi| + \beta|\varphi\rangle\langle\varphi|$$

dargestellt. Die Vorschrift lässt sich auf beliebige Paare reiner Zustände anwenden und sinngemäß auf statistische Mischungen einer beliebigen abzählbaren Menge reiner Zustände verallgemeinern. Aus $\{\psi_\nu\}_{\nu=1,2,3,\dots,N}$, $\|\psi_\nu\| = 1, N \leq \infty$ lassen sich damit Zustände präparieren, die jeweils durch einen Dichtoperator

$$\rho = \sum_{\nu=0}^N \alpha_\nu |\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|, \quad 0 < \alpha_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^N \alpha_\nu = 1$$

dargestellt werden, so dass eine durch den selbstadjungierten Operator A dargestellte Observable den Erwartungswert

$$\langle A \rangle_\rho = \text{tr}(\rho A)$$

hat. Da die rationalen Zahlen in den reellen dicht liegen, wird die Definition des statistischen Gemisches auf reelle α_ν ausgedehnt. Der Operator ρ ist stets positiv, denn für jeden Vektor $\varphi \in \mathcal{H}$ ist

$$\langle \varphi, \rho \varphi \rangle = \sum_{\nu=0}^N \alpha_\nu \langle \varphi, |\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu| \varphi \rangle = \sum_{\nu=0}^N \alpha_\nu |\langle \varphi, \psi_\nu \rangle|^2$$

ein Summe nicht negativer Zahlen. Überdies ist wegen $\|\psi_\nu\| = 1$ mit einer Orthonormalbasis $\{\phi_l\}_{l=1,2,3,\dots,L}$ in \mathcal{H} stets

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho) &= \sum_{l=1}^L \sum_{\nu=0}^N \alpha_\nu \langle \phi_l, |\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu| \phi_l \rangle \\ &= \sum_{\nu=0}^N \alpha_\nu \sum_{l=1}^L |\langle \phi_l, \psi_\nu \rangle|^2 = \sum_{\nu=0}^N \alpha_\nu = 1. \end{aligned}$$

Diese beiden Eigenschaften, $\rho > 0$ und $\text{tr}(\rho) = 1$ charakterisieren die Menge der Dichteoperatoren und damit die Menge der Zustände der Quantenme-

chanik. Im Gegensatz zu klassischen statistische Theorien sind die Komponenten eines statistischen Gemischen nicht eindeutig bestimmt. Als selbstadjungierter Operator hat ρ die eindeutige Spektraldarstellung

$$\rho = \sum_{l=0}^L \lambda_l |\phi_l\rangle\langle\phi_l|, \quad \langle\phi_k, \phi_l\rangle = \delta_{kl}$$

und, wegen $\rho > 0$ und $\text{tr}(\rho) = 1$, gilt $\lambda_l \geq 0$ und $\sum_{l=0}^L \lambda_l = 1$. Die $|\phi_l\rangle\langle\phi_l|$ können also ebenso Mischungskomponenten von ρ sein wie die $|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|$, die nicht paarweise orthogonal sein müssen. Alle möglichen Zerlegungen eines v. Neumann Gemisches ρ in reine werden wir später bestimmen.

Nun bilden die (im Falle unendlicher Dimension von \mathcal{H} beschränkten) selbstadjungierten Operatoren eines Hilbertraumes \mathcal{H} einen reellen Vektorraum \mathcal{Z} und können als Punkte des zugehörigen affinen Raumes aufgefasst werden. Eine Punktmenge \mathcal{B} in einem solchen Raum heisst konvex, wenn sie mit $A, B \in \mathcal{M}$ auch die Punkte enthält, die auf der Geraden

$$X = \alpha A + (1 - \alpha) B, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

zwischen A und B liegen, d.h. wenn $0 < \alpha < 1$ ist. Im Falle unendlicher Dimension des Hilbertraumes ist die Spur nicht für alle beschränkten Operatoren definiert. Man kann sich dann aber auf die Betrachtung der Spurklasseoperatoren beschränken, die trivialer Weise beschränkt sind und überdies ein Ideal in der Algebra der beschränkten linearen Operatoren bilden. Um den Fall $\dim, \mathcal{H} = \infty$ nicht ausschließen zu müssen, sei im Folgenden \mathcal{Z} der reelle Vektorraum der selbstadjungierten Spurklasseoperatoren, der auch Zustandsraum genannt wird. Geometrisch bilden die Dichteoperatoren in \mathcal{Z} eine konvexe Menge. Die positiven Operatoren bilden einen konvexen Kegel \mathcal{C} , denn mit $\langle\psi, X\psi\rangle \geq 0$ ist mit $\lambda \geq 0$ auch $\langle\psi, \lambda X\psi\rangle \geq 0$. Ist überdies $\langle\psi, Y\psi\rangle \geq 0$ und $0 < \alpha < 1$, dann ist $\langle\psi, (\alpha X + (1 - \alpha)Y)\psi\rangle \geq 0$. Die Gleichung $\text{tr}(X) = 1$ definiert eine Hyperebene in \mathcal{Z} . Bezeichnet man die konvexe Menge der Dichteoperatoren mit \mathcal{B} , dann lassen sich die charakteri-

sierenden Eigenschaften der Dichteoperatoren geometrisch durch

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \cap \{X | \text{tr}(X) = 1\}$$

ausdrücken. \mathcal{B} wird Basis des Kegels \mathcal{C} genannt, weil

$$\mathcal{C} = \{X | X = \gamma\rho, \rho \in \mathcal{B}, \gamma \geq 0\}$$

ist. Man schreibt $\mathcal{Z} = \mathcal{C} + (-\mathcal{C})$, womit ausgedrückt wird, dass sich jeder (beschränkte) selbstadjungierte Operator H in einen positiven und einen negativen Teil zerlegen lässt,

$$H = \frac{1}{2}(H + |H|) + \frac{1}{2}(H - |H|),$$

wobei $|H| = \sqrt{H^+H}$ ist. Man sagt, dass \mathcal{C} erzeugend für \mathcal{Z} ist. In der operationalen Axiomatik der Quantentheorie wird diese Struktur von \mathcal{Z} aus der Grundannahme (Mischungssaxiom) hergeleitet, dass die Zustände einer statistischen Theorie eine konvexe Menge bilden und die Erwartungswerte affine Funktionale auf den Zuständen sind, d.h. für $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\rho = \alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2 \quad \Rightarrow \quad \langle A \rangle_\rho = \alpha \langle A \rangle_{\rho_1} + (1 - \alpha) \langle A \rangle_{\rho_2} .$$

Ein ebenso plausibel definierter Mischungsabstand auf \mathcal{B} liefert eine Norm auf \mathcal{Z} , und \mathcal{Z} ist in dieser Topologie vollständig. Diese Norm ist äquivalent zur Spurnorm $\|X\| = \text{tr}(|X|)$. Die Elemente des Banach-Dualraums \mathcal{Z}' sind durch die beschränkten selbstadjungierten Operatoren von \mathcal{H} gegeben, wobei $X \mapsto \text{tr}(XA)$ ist. Die Spur existiert aufgrund der Idealeigenschaft der Spurklasseoperatoren. Eingeschränkt auf \mathcal{B} liefern die linearen Funktionale auf \mathcal{Z} die affinen Funktionale auf \mathcal{B} , $\rho \mapsto \text{tr}(\rho A)$. Im Sprachgebrauch wird das lineare Funktional $X \mapsto \text{tr}(XA)$ mit dem Operator A identifiziert. Auf \mathcal{Z}' ist die Teilordnung durch den Dualkegel

$$\mathcal{C}' := \{H | X \in \mathcal{C} \Rightarrow \text{tr}(HX) \geq 0\}$$

gegeben, die natürlich mit der üblichen Definition, $H \geq 0$ falls $\langle \psi, H\psi \rangle \geq 0$ ist für alle $\psi \in \mathcal{H}$, übereinstimmt. Die Operatoren F mit $0 \leq F \leq 1$ spielen

dabei eine besondere Rolle. Ist $P = P^2$ ein Projektionsoperator, dann ist

$$P = 0(\mathbf{1} - P) + 1P$$

der Operator einer primitiven Observablen, die nur Werte aus $\{0, 1\}$ annehmen kann. Diese Observablen werden oft als Frage bezeichnet: Bei einer Messung lautet die Antwort ‘Nein’, wenn sich der Messwert 0 ergibt, oder ‘Ja’, wenn der Messwert 1 ist. Im Falle $H = \sum k|k\rangle\langle k|$ bedeutet $|k\rangle\langle k|$ die Frage, ob k der Messwert von H ist. Der Spektralsatz sagt aus, dass jede Observable in primitive Observablen zerlegt werden kann. Auch wenn F kein Projektionsoperator ist, stellt

$$F = 0(\mathbf{1} - F) + 1F$$

eine Frage dar. Im Gegensatz zu

$$\{\psi | \langle \psi, P\psi \rangle = 0\}^\perp = \{\psi | \langle \psi, P\psi \rangle = 1\}$$

gilt im Allgemeinen nur

$$\{\psi | \langle \psi, F\psi \rangle = 0\}^\perp \supset \{\psi | \langle \psi, F\psi \rangle = 1\},$$

Die Ansprechwahrscheinlichkeit für die Antwort ‘Ja’ ist also geringer. Die Projektionsoperatoren sind in dieser Hinsicht optimal empfindlich. Die Fragen werden auch Effekte genannt, die bei einer Messung ausbleiben oder auftreten können, die Projektionsoperatoren wegen ihrer optimalen Empfindlichkeit auch Entscheidungseffekte.

Auch in der klassischen Informationstheorie spielen statistische Gemische von Zeichen und Zeichenreihen eine bedeutende Rolle. Schon im ursprünglichen Kanalmodell von Shannon muss bei Empfang eines Zeichens y von Bob danach gefragt werden, mit welcher bedingten Wahrscheinlichkeit $p(x|y)$ das Zeichen x von Alice gesendet wurde. Hinter dem Empfang des Zeichens y steht also für Bob ein statistisches Gemisch möglicher gesendeter Zeichen. Entsprechendes gilt bei Empfang eines Wortes. Die statistischen Gemische

können natürlich auch geometrisch als konvexe Mengen in einem reellen Vektorraum dargestellt werden. Die M^N Wörter sind dazu durch M^N linear unabhängige Vektoren und die statistischen Gemische durch deren konvexe Linearkombinationen darzustellen. Die M^N Ecken des so gebildeten Simplex stellen alle reinen Zustände dar, da es keine kohärenten Überlagerungen in der klassischen Physik gibt. Die Zerlegung in reine Komponenten ist deshalb eindeutig.

Das kürzeste Alphabet besteht aus zwei Zeichen $\{0, 1\}$. Ein Zeichen $x \in \{0, 1\}$ heißt ein Bit und stellt die übliche Speichereinheit der Information dar. Ein Zeichen y eines Alphabets \mathcal{Y} mit 64 Zeichen enthält 6 Bit, die Länge der Wörter in Zeichen aus $\{0, 1\}$, die nötig ist, um die $64 = 2^6$ Zeichen von \mathcal{Y} auszudrücken. Entsprechend heißt der Zustand eines Quantensystems mit nur zwei Anregungszuständen ein Qubit. Da der Hilbertraum eines Qubits nur zwei Dimensionen hat, lässt sich die Geometrie der Zustände leicht veranschaulichen.

1.2 *Der Zustandsraum des Qubits, die Blochkugel* : Der Zustandsraum eines zwei-Niveau-Systems, das durch die linearen Operatoren des \mathbf{C}^2 beschrieben wird, ist der vierdimensionale reelle Raum der hermiteschen 2×2 -Matrizen, der von der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ und den Pauli Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Die Dichteoperatoren liegen auf der dreidimensionalen Hyperebene $\mathbf{H} = \{A | \text{tr} A = 1\}$ und die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 \ni a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \frac{1}{2}(\mathbf{1} + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{1} + \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \right) \in \mathbf{H} \end{aligned}$$

ist affin und bijektiv. Zur Abkürzung schreiben wir

$$a \cdot \sigma := a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Mit $\sigma_i^2 = 1$ und $\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k$, (i, j, k) zyklisch, $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ und $a, b \in \mathbf{R}^3$ folgt

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = (a \cdot b)\mathbf{1} + i(a \times b) \cdot \sigma,$$

was man leicht zeigt, wenn man die linke Seite als Summe ausschreibt:

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = \sum_{j,k} a_j b_k \sigma_j \sigma_k = \sum_j a_j b_j \sigma_j^2 + \sum_{j < k} (a_j b_k - a_k b_j) \sigma_j \sigma_k.$$

Wegen der Antisymmetrie von $a \times b$ folgt weiter

$$\frac{1}{2i} [(a \cdot \sigma), (b \cdot \sigma)] = (a \times b) \cdot \sigma,$$

und dies bildet die Grundlage der räumlichen Spinkinematik. Schreibt man nun mit $e \in \mathbf{R}^3$, $\|e\| = 1$ für das Vektorfeld, das die Drehungen in positiver Richtung um die e-Achse erzeugt

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 \ni b \longmapsto e \times b &= (e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =: (e \cdot M) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \\ &\left(e_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dann ist die durch die Exponentialreihe definierte Einparametergruppe die der räumlichen Drehungen mit dem Winkel φ in positiver Richtung um die e-Achse:

$$R_e(\varphi) := e^{(e \cdot M)\varphi} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e \cdot M)^n \varphi^n, \quad \left. \frac{d}{d\varphi} R_e \right|_{\varphi} = R_e(\varphi)(e \cdot M), \quad R_e(0) = \mathbf{1},$$

$$R_e(\varphi_1 + \varphi_2) = R_e(\varphi_1)R_e(\varphi_2), \quad R_e(\varphi + 2\pi) = R_e(\varphi).$$

Betrachtet man nun die Einparametergruppe der unimodularen unitären (2×2)-Matrizen

$$D_e(\varphi) := e^{-i(e \cdot \sigma) \frac{\varphi}{2}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e \cdot \sigma)^n \left(\frac{\varphi}{2i} \right)^n, \quad \frac{d}{d\varphi} D_e \Big|_{\varphi} = \frac{1}{2i} D_e(\varphi) (e \cdot \sigma),$$

$$D_e(0) = \mathbf{1}, \quad D_e(\varphi_1 + \varphi_2) = D_e(\varphi_1) D_e(\varphi_2),$$

$$D_e(\varphi + 2\pi) = -D_e(\varphi), \quad D_e(\varphi + 4\pi) = D_e(\varphi),$$

dann gilt

$$\frac{d}{d\varphi} (D_e(b \cdot \sigma) D_e^+ \Big|_{\varphi} = \frac{1}{2i} D_e(\varphi) [(e \cdot \sigma), (b \cdot \sigma)] D_e^+(\varphi).$$

Wir verknüpfen nun die Gruppe $O(3)$ der räumlichen Drehungen im \mathbf{R}^3 mit der Gruppe der unimodularen unitären Transformationen $SU(2)$, der Drehungen des Spins. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varphi} (D_e(-\varphi) (R_e(\varphi) b \cdot \sigma) D_e^+(-\varphi)) = \\ & -\frac{1}{2i} D_e(-\varphi) (e \cdot \sigma) (R_e(\varphi) b \cdot \sigma) D_e^+(-\varphi) \\ & + (D_e(-\varphi) (e \times R_e(\varphi) b \cdot \sigma) D_e^+(-\varphi)) \\ & + \frac{1}{2i} (D_e(-\varphi) (R_e(\varphi) b \cdot \sigma) (e \cdot \sigma) D_e^+(-\varphi)) = \\ & D_e(-\varphi) ((e \times R_e(\varphi) b \cdot \sigma) - \frac{1}{2i} [(e \cdot \sigma), (R_e(\varphi) b \cdot \sigma)]) D_e^+(-\varphi) = 0, \end{aligned}$$

weil $\frac{1}{2i} [(a \cdot \sigma), (c \cdot \sigma)] = (a \times c) \cdot \sigma$ für $a, c \in \mathbf{R}^3$ gilt, wie wir oben gezeigt haben.. Der differenzierte Ausdruck ist also konstant und für $\varphi = 0$ ist er gleich $b \times \sigma$. Damit gilt für alle φ

$$D_e(-\varphi) (R_e(\varphi) b \cdot \sigma) D_e^+(-\varphi) = b \cdot \sigma,$$

also die Kovarianzbeziehung

$$(R_e(\varphi) b) \cdot \sigma = D_e(\varphi) (b \cdot \sigma) D_e^+(\varphi),$$

die die räumlichen Drehungen mit den Spindrehungen verknüpft. Bemerke, dass sich $D(2\pi) = -\mathbf{1}$ in der Kovarianzbeziehung nicht auswirkt.