Zusammenfassung der 7. Vorlesung (31.05.2010)

Obwohl es, wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, unmöglich ist, den Zustand eines einzelnen, vorgelegten, Quantensystems zu erkennen oder zu kopieren ("no cloning theorem"), gibt es die Möglichkeit, den unbekannten Zustand von einem Quantensystem auf ein anderes zu übertragen. Bevor wir die Vorschrift, die zur *Teleportation* eines Zustands führt, beschreiben, soll kurz auf das "No Cloning Theorem" eingegangen werden, weil dies die Bedeutung der Teleportation hervorhebt.

Im Allgemeinen wird das No Cloning Theorem damit begrüdet, dass es keinen Schgrödingerprozess geben kann, der etwa mit einem festen $\chi \in \mathcal{H}$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$ den Zustand $\chi \otimes \psi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ in $\psi \otimes \psi$ überführen kann. Da die Integration der Schrödingergleichung auf einen unitären Opertor U führt, müsste für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ gelten

$$U(\chi \otimes \psi) = \psi \otimes \psi, \quad \text{und} \quad U(\chi \otimes \varphi) = \varphi \otimes \varphi.$$

Daraus folgt wegen der Linearität von U sofort, dass

$$\begin{aligned} U(\chi \otimes (\alpha\psi + \beta\varphi)) &= \alpha(\psi \otimes \psi) + \beta(\varphi \otimes \varphi) \\ &\neq (\alpha\psi + \beta\varphi) \otimes (\alpha\psi + \beta\varphi) \\ &= \alpha^2(\psi \otimes \psi) + \beta^2(\varphi \otimes \varphi) + \alpha\beta(\psi \otimes \varphi + \varphi \otimes \psi) \end{aligned}$$

Ein linearer Operator U kann also die geforderte Eigenschaft nicht erfüllen. Dieses Argument ist allerdings noch nicht allgemein genug, um das No Cloning Theorem zu beweisen. Eigentlich müsste man in der Dichteoperatorformulierung zeigen, dass es keine vollständig positive Abbildung gibt, die das Cloning bewirken kann. Hier mag das einfachere Argument jedoch genügen.

Die Möglichkeit der Teleportation ist eine der faszinierendsten Phänomene der Quantenkommunikation. Sie hat kein klassischen Analogon und beruht auf der Existenz verschränkter Zustände. Eine Vorausstzung ist die Existenz von Orthonormalbasen maximal verschränkter Zustände. Dafür gilt der folgende Satz [R. Werner, J. Phys. A, Math. Gen. 34, No. 35, 7081-7094 (2001)].

Satz: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum der endlichen Dimwnaion M. Genau dann, wenn es im Tensorprodukt $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ eine Orthonormalbasis maximal verschränkter

Zustände $\{\Phi_\nu\}_{\nu=0,1,2,\ldots,(M^2-1)}$ gibt, gibt es eine Familie unitärer Operatoren U_k auf $\mathcal{H}$, so dass

$$tr(U_\nu^+ U_\mu) = M\delta_{\nu\mu}, \quad \nu\mu = 0,1,2,3,\ldots,(M^2-1)$$

gilt.

Beweis: Betrachte nach Wahl einer Basis $|k>$ in $\mathcal{H}$ die durch die Gleichung

$$< i|A|k >= \sqrt{M} < ik|\Psi >$$

definierte Korrespondenz der linearen Operatoren A auf $\mathcal{H}$ mit den Vektoren in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, wobei $|ik >= |i > \otimes |k >$ ist. Mit dem maximal verschränkten Zustand

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k |kk >$$

ist dann

$$(A \otimes \mathbf{1})\Omega = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k (A|k >) \otimes |k >= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i,k} |i >< i|A|k > \otimes |k >= \Psi,$$

und mit $< k|A|i >=< i|A^T|k >$ ist

$$(A \otimes \mathbf{1})\Omega = (\mathbf{1} \otimes A^T)\Omega = \Psi.$$

Korrespondiert A' mit Ψ' in derselben Weise wie A mit Ψ, dann gilt für jeden linearen Operator B auf $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} < \Psi, (B \otimes \mathbf{1})\Psi' > &= < \Omega, (A^+ B A' \otimes \mathbf{1})\Omega > \\ &= \frac{1}{M} \sum_k < k|A^+ B A'|k >= \frac{1}{M} \mathrm{tr}(A^+ B A'). \end{aligned}$$

Trivialer Weise gilt für jeden maximal verschränkten Zustand Φ in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, $\Phi = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k \psi_k \otimes \varphi_k$ für alle B

$$< \Phi, (B \otimes \mathbf{1})\Phi >= \frac{1}{M} \mathrm{tr}(B).$$

Gilt umgekehrt diese Gleichung für alle B, dann gilt sie auch für die Eigenprojektoren $|\psi_k >< \psi_k|$ von $\mathrm{tr}_2(|\Phi >< \Phi|)$. Damit folgt, dass Φ maximal verschränkt ist, denn $< \Phi, (|\psi_k >< \psi_k| \otimes \mathbf{1})\Phi >= c_k^2 = \frac{1}{M}$. Nun gilt für $A = A'$ für alle B

$$< \Psi, (B \otimes \mathbf{1})\Psi >= \frac{1}{M}\mathrm{tr}(A^+ BA), \quad \text{und} \quad \frac{1}{M}\mathrm{tr}(A^+ BA) = \frac{1}{M}\mathrm{tr}(B)$$

geanu dann, wenn A unitär ist. Damit haben wir gezeigt: Ψ ist genau dann maximal verschrränkt wenn

$$\Psi = (U \otimes \mathbf{1})\Omega = (\mathbf{1} \otimes U^T)\Omega$$

mit einem unitären Operator U gilt. Die Aussage des Satzes folgt nun unmittelbar: Ist $\{\Phi_\nu\}_{\nu=0,1,2,3,\ldots,(M^2-1)}$ eine Orthonoermalbasis maximal verschränkter Zustände in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, dann gibt es unitäre Operatoren U_ν auf $\mathcal{H}$, so dass

$$\Phi_\nu = (U_\nu \otimes \mathbf{1})\Omega \quad \text{und} \quad \delta_{\nu\mu} =< \Phi_\nu, \Phi_\mu >= \frac{1}{M}\mathrm{tr}(U_\nu^+ U_\mu).$$

Ist umgekehrt eine Familie $\{U_\nu\}_{\nu=0,1,3,\ldots,(M^2-1)}$ auf $\mathcal{H}$ mit der geforderten Eigenschaft gegeben, dann bilden die $\Phi_\nu := (U_\nu \otimes \mathbf{1})\Omega$ eine Orthonormalbasis maximal verschränkter Zustände in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten nun die Vorschrift (in der Fachsprache "das Protokoll") dür die Teleportation. Das 1. Quantensystem, dessen Zustand übertragen werden soll, kann sich beliebig weit entfernt von dem 3.Quantensystem befinden, auf das der Zustand übertragen werden soll, wenn nur die Möglichkeit besteht, vom Ort des 1. Systems klassisch eine Nachricht an den Ort zu übermitteln, an dem sich das 3. System befindet. Dann sind zwei Akteure nötig, "Alice", die auf dem 1. System operieren kann, und "Bob", der auf dem 3. operieren kann. Alice muss auch noch auf einem 2. System operieren können, das in einem Hilbertraum beschrieben wird, in dem eine Familie unitärer Operatoren U_ν mit $tr(U_\nu^+ U_\mu) = M\delta_{\nu\mu}$ existiert, wobei M die Dimension des Hilbertraumes ist (vgl. den vorstehenden Satz). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die drei Quantensysteme in Hilberträumen $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, 3$, gleicher Dimension beschrieben werden und durch Wahl korrespondierender Orthonormalbasen Isomorphien ausgezeichnet sind. Die korrespondierenden Basisvektoren seien in jedem der drei Hilberträume mit $|k >$, k=1,2,3,...,M, bezeichnet. Schließlich nuss das 2. System zumammen mit dem 3. System in einem maximal verschränkten Zustand sein, der o.B.d.A.

der Zustand $\Omega = \frac{1}{M}\sum_k |kk>$ sei. Ist ρ der unbekannte, zu tleportierende Zustand des 1. Systems, dann ist die Sachlage vor der Teleportation:

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\mathcal{H}_1 \quad \otimes \quad \mathcal{H}_2}^{\text{Alice}} & \otimes & \overbrace{\quad \mathcal{H}_3 \quad}^{\text{Bob}} \\ \rho \quad\quad \otimes \quad\quad & |\Omega >< \Omega| & \end{array}$$

Die Vorschrift schreibt nun eine lokale Operation vor, die Alice an den Teilchen 1 und 2 durchzuführen hat. Aufgrund des vorstehenden Theorems ist in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ mit $\Omega' = \frac{1}{M}\sum_k |kk>$ die Orthonormalbasis maximal verschränkter Zustände $\Phi_\nu = (U_\nu \otimes \mathbf{1})\Omega'$ gegeben. Alice soll an den Systemen 1 und 2 die Ovservable

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{1}, \qquad \mathbf{A} = \sum_{\nu=0}^{M^2-1} \nu |\phi_\nu >< \phi_\nu|$$

ideal und erster Art messen, und das zufällige Ergebnis, etwa ν_0, Bob mitteilen. Dazu ist die Möglichkei einer klassischen Kommunikation von Alice zu Bob notwendig. Bob führt dann am 3. System eine von ν_0 abhängige lokale Operation aus. Danach ist die Sachlage

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\mathcal{H}_1 \quad \otimes \quad \mathcal{H}_2}^{\text{Alice}} & \otimes & \overbrace{\quad \mathcal{H}_3 \quad}^{\text{Bob}} \\ |\Phi_{\nu_0} >< \Phi_{\nu_0}| & \otimes & \rho \end{array}$$

Die Verschränktheit des Zustands der Systeme 2 und 3, die gewissermaßen als Resource für die Teleportation gedient hat, ist nun verbraucht. Dafür befinden sich die Systeme 1 und zwei in einem maximal verschränkten Zustand. Das eben beschriebne Verfahren schreibt nur lokale Operationen und klassischer Kommunikation vor. Solche Verfahren werden als "LOCC-Protokolle" klassifiziert.

Wir müssen noch die Behauptung beweisen, dass dieses Verfahren zur Übetragung des Zustands ρ führt. Zunächst ist der Zustand des Gesamtsystems nach der Messung von Alice mit dem Ergebnis ν_0

$$\frac{(|\Phi_{\nu_0} >< \Phi_{\nu_0}| \otimes \mathbf{1}_3)(\rho \otimes |\Omega >< \Omega|)(|\Phi_{\nu_0} >< \phi_{\nu_0}| \otimes \mathbf{1}_3)}{\mathrm{tr}((|\Phi_{\nu_0} >< \Phi_{\nu_0}| \otimes \mathbf{1}_3)(\rho \otimes |\Omega >< \Omega|))}$$

Der Zähler ist,wenn man Ω ausschreibt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{M}\sum_{m,m'} \\
& (|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|\otimes\mathbf{1}_3)(\rho\otimes|m><m'|\otimes|m><m'|)(|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|\otimes\mathbf{1}_3) \\
= & \frac{1}{M}\sum_{m,m'}(|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|(\rho\otimes|m><m'|)|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|)\otimes|m><m'|
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
& <\Phi_{\nu_0}|(\rho\otimes|m><m'|)|\Phi_{\nu_0}>=<\Omega'|(U^+_{\nu_0}\rho U_{\nu_0}\otimes|m><m'|)|\Omega'> \\
= & \frac{1}{M}\sum_{l,l'}<ll|(U^+_{\nu_0}\rho U_{\nu_0}\otimes|m><m'|)|l'l'> \\
= & \frac{1}{M}\sum_{l,l'}<l|U^+_{\nu_0}\rho U_{\nu_0}|l'><l|m><m'|l'>=\frac{1}{M}<m|U^+_{\nu_0}\rho U_{\nu_0}|m'>,
\end{aligned}$$

und mithin ist der Zähler

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{M^2}\sum_{m,m'}|\Phi_{\nu_0}><m|U^+_{l_0}\rho U_{l_0}|m'><\Phi_{\nu_0}|)\otimes|m><m'| \\
= & \frac{1}{M^2}|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|\otimes\sum_{m,m'}|m><m|U^+_{\nu_0}\rho U_{\nu_0}|m'><m'| \\
= & \frac{1}{M^2}|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|\otimes U^+_{\nu_0}\rho U_{\nu_0}
\end{aligned}$$

Da der Nenner die Wahrscheinlichkeit für das zufällige Messergebnis von Alice auch durch die Spur des Zählers gegeben ist, gilt

$$p(\nu_0)=\frac{1}{M^2}\mathrm{tr}(|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|\otimes U^+_{\nu_0}\rho U_{\nu_0})=\frac{1}{M^2}$$

und der Zustand des Geamtsystems nach der Messung von Alice ist

$$|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|\otimes U^+_{\nu_0}\rho U_{\nu_0}.$$

Wenn Bob das Messergebnis ν_0 von Alice erfahren hat, kann er die ν_0 entsprechende lokale Operation ausführen und erhält

$$(\mathbf{1}_{12}\otimes U_{\nu_0})(|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|\otimes U^+_{\nu_0}\rho U_{\nu_0})(\mathbf{1}_{12}\otimes U^+_{\nu_0})=|\Phi_{\nu_0}><\Phi_{\nu_0}|\otimes\rho,$$

den gewünschten Endzustand.