Nachtrag zur Zusammenfassung der 15. Vorlesung (22.11.2010)

Wie schon am Schluss der Zusammenfassung der 15, Vorlesung bemerkt wurde, scheint die Aussage der kombinierten Konvexität der relativen Entropie zu schwach zu sein, um die Ungleichung $S(\mathcal{J}\rho\|\mathcal{J}\sigma) \leq S(\rho\|\sigma)$ daraus herzuleiten, wenn für $\mathcal{J}\rho = \sum_j C_j \rho C_j^+$ nur $\sum_j C_j^+ C_j = \mathbf{1}$ gefordert wird. Geht man aber von der kombinierten Konkavität von $\mathrm{tr}(XA^{1-t}(B^tX)^+)$ in (A,B) für $t \in [01]$ aus, dann lässt sich die Dualität $\mathrm{tr}(X\mathcal{J}\rho) = \mathrm{tr}((\mathcal{J}'X)\rho)$ ausnutzen, und dies führt zum Ziel. Anstatt nun direkt an das schon bewiesene Liebsche Theorem anzuknüpfen, wird hier dieses Theorem im Rahmen der quadratischen Interpolation von Halbnormen von Armin Uhlmann (loc. cit.) hergeleitet, die nicht nur dieses Theorem in anschaulicher Weise motiviert, sondern auch die relative Entropie $S(\rho\|\sigma)$ als Tangente der eindeutigen quadratischen Interpolation von $\mathrm{tr}((\cdot)\rho)$ nach $\mathrm{tr}((\cdot)\sigma)$ am Punkt $\mathrm{tr}((\cdot)\rho)$ erscheinen lässt.

Man betrachte einen $\mathbf{C}$-linearen Raum $\mathcal{T}$. Auf $\mathcal{T}$ sei $\mathcal{S}$ die Menge aller hermiteschen quadratischen Formen α auf $\mathcal{T}$, d.h. $\alpha(X,Y) = \overline{\alpha(Y,X)}$, die in natürlicher Weise teilgeordnet ist. Für zwei beliebige Halbnormen p, q auf $\mathcal{T}$ ist dann

$$\alpha_{p,q} := \sup\{\alpha \in \mathcal{S} | X, Y \in \mathcal{T} \Rightarrow |\alpha(X,Y)| \leq p(X)q(Y)\}$$

eindeutig bestimmt. Da $|\alpha(X,Y)|$ symmetrisch in (X,Y) ist, kann die Bedingung äquivalent durch $|\alpha(X,Y)| \leq \frac{1}{2}(p(X)q(Y) + p(Y)q(X))$ ersetzt werden, also gilt $\alpha_{p,q} = \alpha_{q,p}$. Auf diese Weise bestimmen p und q eindeutig die Halbnorm

$$m_{p,q} = m_{q,p} : X \mapsto \sqrt{\alpha_{p,q}(X,X)},$$

die **quadratisches Mittel** von p und q genannt werde. Es gelten

$$m_{p,p} = p, \quad \lambda\mu \geq 0 \Rightarrow \lambda\mu m_{p,q} = m_{\lambda^2 p, \mu^2 q}, \quad \text{und} \quad (m_{p,q}(X))^2 \leq p(X)q(X).$$

Ist $\tilde{\mathcal{T}}$ ein Teilraum von $\mathcal{T}$,

$$\tilde{\alpha}_{p,q} := \sup\{\alpha \in \mathcal{S} | X, Y \in \tilde{\mathcal{T}} \Rightarrow |\alpha(X,Y)| \leq p(X)q(Y),\}$$

und

$$\tilde{m}_{p,q} = \tilde{m}_{q,p} : X \mapsto \sqrt{\tilde{\alpha}_{p,q}(X,X)},$$

dann gilt offenbar:

Aussage 1:

$$\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad \tilde{m}_{p.q}(\tilde{X}) \geq m_{p.q}(\tilde{X}).$$

Ferner gilt für Halbnormen $p, p_1, p_2,\ q, q_1, q_2$ und Zahlen $\lambda, \mu \geq 0$:

Aussage 2:

$$\left.\begin{array}{ccccc} p^2 & \geq & \lambda p_1^2 & + & \mu p_2^2 \\ q^2 & \geq & \lambda q_1^2 & + & \mu q_2^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad m_{p,q}^2 \geq \lambda m_{p!,q_1}^2 + \mu m_{p_2,q_2}^2,$$

was ein Spezialfall der folgenden Aussage ist.

Eine Funktion $f : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^n$ heiße monoton, falls $f(\xi) \geq f(\eta)$ für $\|\xi\| \geq \|\eta\|$ gilt.

Aussage 3: Seien $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ und $q, q_1, q_2, \ldots, q_n$ Halbnormen auf $\mathcal{T}$ und $f.g$ monotone Halbnormen auf $\mathbf{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\xi, \eta \in \mathbf{R}^n \quad \Rightarrow \quad f(\xi)g(\eta) \geq |\sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \eta_i|,$$

dann gilt

$$\left.\begin{array}{ccc} p & \geq & f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ q & \geq & g(q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad m_{p,q}^2 \geq \sum_{i=1}^{n} m_{p_i,q_i}^2.$$

Beweis: Es gilt

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_{p_i,q_i}(X,Y)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{p_i,q_i}(X,Y)| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(X) q_i(Y).$$

Mit $\xi_i := p_i(X)$ und $\eta_i := q_i(Y)$ folgt daraus

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_{p_i,q_i}(X,Y)| \leq f(\xi)g(\eta) \leq p(X)q(Y),$$

also gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{p_i,q_i} \in \{\alpha \in \mathcal{S} | X, Y \in \mathcal{T} \Rightarrow |\alpha(X,Y)| \le p(X)q(Y).$$

Daraus folgt

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m^2_{p_i,q_i}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{p_i,q_i}(X,X)} \le \sqrt{\alpha_{p,q}(X,X)} = m_{p,q}(X),$$

was zu zeigen war.

Eine Abbildung $\mathbf{R} \supseteq [t_1, t_2] \ni t \mapsto p_t$ in die Halbnormen auf $\mathcal{T}$ heiße eine **quadratische Skala** auf $[t_1, t_2]$, wenn $t \mapsto p_t((X)$ für alle $X \in \mathcal{T}$ stetig ist und mit $s, s' \in [t_1, t_2]$ und $t = \frac{1}{2}(s + s')$ auch $p_t = m_{p_s,p_{s'}}$ gilt. Für zwei Halbnormen p, q auf $\mathcal{T}$ heiße eine quadratische Skala $t \mapsto r_{p,q;t}$ auf $[0,1]$ eine **quadratische Interpolation** von p nach q, falls

$$r_{p,q;1/2} = m_{p,q}, \qquad r_{p,q;t/2} = m_{p,r_t}, \qquad r_{p,q;(1+t)/2} = m_{q.r_t}$$

gelten.

Aussage 4: Für ein gegebenes Paar von Halbnormen $p.q$ gibt es höchstens eine quadratische Interpolation von p nach q.

Beweis: Nach der ersten Gleichung der Definition müssen alle quadrratischen Interpolationen an der Stelle $t = \frac{1}{2}$ übereinstimmen. Damit nach der zweiten und dritten Gleichung aber auch an den stellen $t \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$ u. s. f., so dass sie schließlich für alle $t = \frac{M}{2^N}$, $M = 1.2.\ldots, 2^N - 1$, $N \in \mathbf{N}$, übereinstimmen müssen. Die quadratischen Skalen sind aber nach Definition stetig, und die quadratische Interpolation muss daher auf dem ganezn Segment $[0,1]$ eindeutig sein.

Aussage 5: Falls die mit $X_0 \in \mathcal{T}$ ausgewertete quadratische Interpolation $r_{q.p.;t}(X_0)$ von p nach q an der Stelle $s \in [0,1]$ verschwindet, dann gilt $r_{q.p.;t}(X_0) = 0$ auf ganz $[0,1]$.

Beweis: Aus der Eigenschaft $(m_{p,q}(X))^2 \le p(X)q(X)$ für das quadratische Mittel folgt

$$0 \le r_{p,q;s/2}(X_0) = m_{p,r_{p,q;s}}(X_0) \le \sqrt{p(X_0) r_{q.p.;s}(X_0)} = 0$$

und

$$0 \leq r_{p,q;(1+s)/2}(X_0) = m_{q.r_{pq;s}}(X_0) \leq \sqrt{q(X_0) r_{q.p.;s}(X_0)} = 0$$

u.s.f.. Wie im Beweis der Aussage 4 schließt man auf die Behauptung.

Aussage 6: Seien $t_i, s_i \in [0,1]$, $i = 1,2,3,\ldots,m$, und $\sum_1^m t_i = 1$, dann gilt mit $s := \sum_1^m t_i s_i$

$$r_{p,q;s} \leq \prod_{i=1}^{m} (r_{p,q;;s_i})^{t_i} \qquad \text{und speziell} \qquad r_{p,q;t} \leq (r_{p,q:0})^{1-t} (r_{p,q;1})^t.$$

Beweis: Sei $r_{p,q;s}(X) \neq 0$ und $f(s) := \log_2(r_{p,q;s}(X))$. Aus der Eigenschaft $p_t = m_{p_s,p_{s'}}$ mit $t = \frac{1}{2}(s+s')$ von quandratischen Skalen und $(m_{p,q}(X))^2 \leq p(X)q(X)$ von quadratischen Mitteln folgt

$$\begin{aligned} f(\frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2}) &= \log_2(r_{p,q;\frac{s_1+s_2}{2}}(X)) \\ &\leq \frac{1}{2}\log_2(r_{p,q;s_1}(X) r_{p,q;s_2}(X)) = \frac{1}{2} f(s_2) + \frac{1}{2} f(s_2). \end{aligned}$$

Da die Argumente s_1 und s_2 in [01] beliebig sind und f stetig ist, folgert man leicht, dass f konvex sein muß. Damit gilt

$$f(s) = f(\sum_1^m t_i s_i) \leq \sum_{i=1}^m t_i f(s_i),$$

was zur Behauptung äquivalent ist. Die speezielle Formel ergibt sich daraus. dass die allgemeine Formel für alle $1 > \epsilon_i > 0$ und $s_1 = \epsilon_1$, $s_2 = 1 - \epsilon_2$ gilt. Aus der Stetigkeit der quadratischen Interpolation in $t \in [0,1]$ folgt die Behauptung.

Falls $\lim_{\epsilon \downarrow 0} r_{p,q,\epsilon} = p$ und $\lim_{\epsilon \downarrow 0} r_{p,q,(1-\epsilon)} = q$ gilt, lautet die spezielle Formel $r_{p,q;t} \leq p^{1-t} q^t$..

Aussage 7: Falls $p \geq p'$ und $q \geq q'$ gilt, dann gilt auch $r_{p,q;t} \geq r_{p',q';t}$.

Beweis: Nach Aussage 2 folgt $m_{p,q} \geq m_{p'.q'}$ nach Voraussetzung. Die Definitionsformeln für die quadratidche Interpolation liefern damit die Gültigkeit der Behauptung auf einer Menge, deren Abschuss $[0,1]$ ist. Aus der Stetigkeit von $r_{p,q;t}$ folgt deshalb die Behauptung.

Aussage 8: Die quadratische Interpolation ist in folgender Weise (Wigner-Yanase-Dyson-Lieb-Konkavität) kombiniert konkav in (p, q). Sind Halbnormen p, p', p'', q, q', q'' gegeben, $\lambda \in [0, 1]$, und gilt

$$p^2 \geq \lambda p'^2 + (1 - \lambda)p''^2, \qquad q^2 \geq \lambda q'^2 + (1 - \lambda)q''^2,$$

dann ist (unter Einbeziehung von Aussage 7) für $t \in [0, 1]$

$$(r_{p,q;t})^2 \geq \lambda(r_{p',q';t})^2 + (1 - \lambda)(r_{p'',q'';t})^2.$$

Beweis: Da die quadratische Interpolation stetig ist, kann man o.B.d.A die abgeschlossene Menge $\mathcal{I}$ der Arguments t betrachten, für die die Konkavität gilt. Nach Aussage 2 gilt sie für das quadratische Mittel und mithin aufgrund der Definitionsgleichungen für die quadratisch Interpolation auf einer in $[0, 1]$ dichten Menge.

Sei nun $\mathcal{T}'$ ein weiterer $\mathbf{C}$-linearer Raum und $\Phi : \mathcal{T}' \mapsto \mathcal{T}$ eine lineare Abbildung. Eine Halbnorm p auf $\mathcal{T}$ definiert dann durch $p'(X') := (\Phi^* p)(X') := (\Phi X)$ ein solche auf $\mathcal{T}'$.

Aussage 9: Sei $\Phi : \mathcal{T}' \mapsto \mathcal{T}$ eine lineare Abbildung und p, q Halbnormen auf $\mathcal{T}$. Dann gilt für $t \in [0, 1]$ und $' \in \mathcal{T}'$

$$r_{p,q;t}(\Phi X') \leq r_{\Phi^* p, \Phi^* q;t}(X').$$

Beweis: Weil aus $|\alpha(X, Y)| \leq p(X)q(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{T}$ trivialerweise $|\alpha(\Phi X', \Phi Y')| \leq p(\Phi X')(\Phi Y') = \Phi^* p(X')\Phi^* q(Y')$ für alle $X', Y' \in \mathcal{T}'$ folgt,, ist $m_{pq}(\Phi X') \leq m_{\Phi^* p, \Phi * q}(X')$ für alle $X' \in \mathcal{T}'$. Die Definitionsgleichungen und die Stetigkeit der quadratischen Interpolation liefern die Behauptung.

Aussage 10: Seei $\mathcal{T}$ von endlicher Dimension und auf $\mathcal{T}$ seien $p : X \mapsto \sqrt{\alpha(X, X)}$ und $q : X \mapsto \sqrt{\beta(X, X)}$ Halbnormen, die von den positiven hermiteschen Formen α, β auf $\mathcal{T}$ erzeugt werden. Dann gibt es genau eine Funktion $\gamma_{\alpha;\beta;z}$ von $\{z \in \mathbf{C} | 0 \leq z + \bar{z} \leq 2\}$ in die positiven hermiteschen Formen auf $\mathcal{T}$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) $z \mapsto \gamma_{\alpha;\beta;z}(X, Y)$ ist stetig und holomorph auf $0 < z + \bar{z} < 2$.
(ii) Für $t \in [0, 1]$ ist $\gamma_{\alpha;\beta;t}(X, X) \geq 0$ und $h_{p,q;t} := \sqrt{\gamma_{\alpha;\beta;t}(X, X)}$ ist die quadratische Interpolation von p nach q.

(iii) Es gilt $\overline{\gamma_{\alpha;\beta;z}} = \gamma_{\alpha;\beta;\bar{z}}$ und für $z + \bar{z} = t_1 + t_2$ gilt $|\gamma_{\alpha;\beta;z}(X,Y)| \leq h_{p,q;t_1}(X) h_{p,q;t_2}(Y)$
(iv) Für $t \in [0,1]$ ist $\gamma_{\alpha;\beta;t}$ kombiniert konkav in (α, β).

Beweis: Man betrachte die Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{S} := \mathrm{span}\{X | \alpha(X,X) + \beta(X,X) \neq 0\}$$

von $\mathcal{T}$ mit dem inneren Produkt $< \cdot, \cdot > := \alpha + \beta$. Sei $\alpha(X,Y) = < X, AY >$ und $\beta(X,Y) = < X, BY >$. Die Eigenwerte von $A + B$ müssen nach Konstruktion auf $\mathcal{S}$ positiv sein. Nun gilt

$$B_1 := \frac{1}{\sqrt{A+B}} A \frac{1}{\sqrt{A+B}}, \quad B_2 := \frac{1}{\sqrt{A+B}} B \frac{1}{\sqrt{A+B}} \quad \Rightarrow \quad [B_1, B_2] = 0,$$

weil $B_1 + B_2 = \mathbf{1}$, so dass $B_1 B_2 = B_2 B_1 = B_2 - B_2^2$ ist. $< X, \sqrt{B_1}\sqrt{B_2}\, Y >$ ist damit eine positive hermitesche Form, die überdies aufgrund der Schwarzschen Ungleichung

$$| < X, \sqrt{B_1}\sqrt{B_2}\, Y > | \leq \|\sqrt{B_1}\, X\| \|\sqrt{B_2}\, Y\| = \sqrt{< X, B_1 X >}\sqrt{< Y, B_2 Y >}$$

für alle $X, Y \in \mathcal{T}$ erfüllt. Sie ist auch das Supremum der hermiteschen Formen mit dieser Eigenschaft, weil für $\sqrt{B_1}\, X = \sqrt{B_2}\, Y$ schon das Gleichheitszeichen gilt. Da der Operator $\sqrt{A+B}$ auf $\mathcal{S}$ bijektiv operiert, bleiben diese Eigenschaften gültig, wenn X durch $\sqrt{A+B}\, X$ und Y durch $\sqrt{A+B}\, Y$ ersetzt wird. Damit erhält man

$$| < X, \sqrt{A+B}\sqrt{B_1}\sqrt{B_2}\sqrt{A+B}\, Y > | \leq \sqrt{< X, A_1 X >}\sqrt{< Y, A_2 Y >},$$

und mit

$$C_{A,B;\frac{1}{2}} := \sqrt{A+B}\sqrt{B_1}\sqrt{B_2}\sqrt{A+B} = \sqrt[4]{A+B}\sqrt{A}\frac{1}{\sqrt{A+B}}\sqrt{B}\sqrt[4]{A+B}$$

ist das quadratische Mittel von p und q

$$m_{p,q}(X) = \sqrt{< X, C_{A,B;\frac{1}{2}} X >}.$$

Betrachte nun die für $z \in \mathbf{C}$ durch

$$C_{A,B;z} := \sqrt{A+B} B_1^{(1-z)} B_2^z \sqrt{A+B} = \sqrt[4]{A+B} A^{(1-z)} \frac{1}{\sqrt{A+B}} B^z \sqrt[4]{A+B}$$

definierte quadratische Form $\gamma_{\alpha;\beta;;z}(X,Y) =< X, C_{A,B;z}X >$. Für $q < z+\bar{z} < 2$ ist $\gamma_{\alpha;\beta;z}(X,Y)$ holomorph und es gilt für reelle $t \in [01]$

$$h_{p,q;t}(X) := \sqrt{\gamma_{\alpha;\beta;t}(X,Y)} = \sqrt{< X, C_{A,B^;t}X >}$$

eine quadratische Interpolation von p nach q. Dies folgt so:

$$h_{p,q;\frac{1}{2}}(X) = \sqrt{< X, C_{A,B;\frac{1}{2}}X >} = m_{p,q}(X),$$

und mit der Abkürzung $W := \sqrt{A+B}$ ist

$$\begin{aligned}
C_{A,B;\frac{t}{2}} &= \sqrt{A+B}\, B_1^{(1-\frac{t}{2})} B_2^{\frac{t}{2}} \sqrt{A+B} = W\sqrt{B_1}\sqrt{B_1^{(1-t)}B_2^t}\, W \\
&= W\frac{1}{W^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}\frac{1}{W^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{W^{(1-t)}}A^{(1-t)}\frac{1}{W^{(1-t)}}\frac{1}{W^t}B^t\frac{1}{W^t}}\, W \\
&= W\frac{1}{W^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{1}{2}}\frac{1}{W^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{W^{\frac{1}{2}}}\sqrt{W\frac{1}{W^{(1-t)}}A^{(1-t)}\frac{1}{W^{(1-t)}}\frac{1}{W^t}B^t\frac{1}{W^t}W}\ \frac{1}{W^{\frac{[}{4}]12}}W \\
&= \sqrt[4]{A+B}\sqrt{A}\frac{1}{\sqrt{A+B}}\sqrt{C_{A,B;t}}\sqrt[4]{A+B} = C_{A,C_{A,B;t};\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

und damit

$$h_{p,q;\frac{t}{2}}(X) = \sqrt{< X, C_{A,B;\frac{t}{2}}X >} = \sqrt{< X, C_{A,C_{A,B;t}}X >} = m_{p,h_{p,q:t}}(X).$$

Analog zeigt man

$$h_{p,q;\frac{1+t}{2}}(X) = m_{q,h_{p,q:t}}(X).$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
C_{A,B;0} &= \sqrt[4]{A+B}\sqrt{A}\frac{1}{\sqrt{A+B}}\sqrt{C_{A,B;0}}\sqrt[4]{A+B} \\
&= \sqrt[4]{A+B}\sqrt{A}\frac{1}{\sqrt{A+B}}\sqrt{\sqrt{A+B}B_1\sqrt{A+B}}\sqrt[4]{A+B} \\
&= \sqrt[4]{A+B}\sqrt{A}\frac{1}{\sqrt{A+B}}\sqrt{A}\sqrt[4]{A+B} = C_{A,A;\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

also ist

$$h_{p,q;0}(X) = \sqrt{< X, C_{A,B;0}X >} = \sqrt{< X, C_{A,A;\frac{1}{2}}X >} = m_{p,p}(X) = p(X).$$

Analog zeigt man

$$h_{p,q;1}(X) = m_{q,q}(X) = q(X).$$

Mit $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}(t_1+t_2)$ ist

$$\begin{aligned}
C_{A,B;z} &= \sqrt{A+B}\; B_1^{(1-z)} B_2^z \sqrt{A+B} \\
&= \sqrt{A+B}\; B_1^{(1-\frac{t_1+t_2}{2})-iy} B_2^{\frac{t_1+t_2}{2}+iy} \sqrt{A+B} \\
&= \sqrt{A+B}\sqrt{B_1}^{(1-t_1)+(1+t_2)} B_1^{-iy} B_2^{iy} \sqrt{B_2}^{t_1+t_2} \sqrt{A+B} \\
&= \sqrt{A+B}\sqrt{B_1^{(1-t_1)} B_2^{t_1}}\, B_1^{-iy} B_2^{iy} \sqrt{B_1^{(1-t_2)} B_2^{t_2}} \sqrt{A+B},
\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}
& |\gamma_{\alpha;\beta;z}(X,Y)| = |< X, C_{A,B;z} Y >| \\
\leq\; & \|B_1^{iy}\sqrt{B_1^{(1-t_1)} B_2^{t_1}}\sqrt{A+B}\; X\| \|B_2^{iy}\sqrt{B_1^{(1-t_2)} B_2^{t_2}}\sqrt{A+B}\; Y\| \\
=\; & \sqrt{< X, \sqrt{A+B} B_1^{(1-t_1)} B_2^{t_1} \sqrt{A+B}\; X >} \\
& \qquad \sqrt{< Y, \sqrt{A+B} B_1^{(1-t_2)} B_2^{t_2} \sqrt{A+B}\; Y >} \\
=\; & \gamma_{\alpha;\beta;t_1}(X,X)\gamma_{\alpha;\beta;t_2}(Y,Y).
\end{aligned}$$

Damit sind die Behauptungen *(i)(ii)(iii)* des Satzes bewiesen, denn nach Aussage 4 existiert höchstens eine quadratische Interpolation von p nach q. Die Behauptung *(iv)* ist identisch mit Aussage 8.

Bemerkung: Ist $\mathcal{T}$ der Hilbertraum der komplexen $(M \times M)$-Matrizen mit dem inneren Produkt $\ll X, Y \gg = \mathrm{tr}(X^+ Y)$. Für positive Matrrizen $A \geq 0$, $B \geq 0$ sind dann

$$p(X) := \sqrt{\ll X, AX \gg} \quad \text{und} \quad q(X) := \sqrt{\ll X, BX \gg}$$

und die Operatoren

$$B_1 . X \mapsto AX, \qquad \text{und} \qquad B_2 : Y \mapsto YB$$

sind vertaucschbar. Das quadradratische Mittel ist dann

$$m_{p,q}(X) = \sqrt{\ll X, B_1 B_2 X \gg} = \sqrt{\mathrm{tr}(X^+ AXB)},$$

und die quadratische Approximation ist

$$h_{p,q;t}(X) = \sqrt{\ll X, B_1^{(1-t)} B_2^t X \gg} = \sqrt{\mathrm{tr}(X^+ A^{(1-t)} X B^t)}.$$

Seien nun p und q zwei Halbnormen auf $\mathcal{T}$,die durch die positiven hermiteschen Funktionale α ind βauf erzeugt werden, $p(x) = \sqrt{\alpha(X,X)}$ und $q(x) = \sqrt{\beta(X,X)}$. dann heiße

$$S(\alpha;\beta)(X) = -\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\gamma_{\alpha,\beta;t}(X,X) - \alpha(X,X)}{t}$$

das **Funktional der relativen Entropie**

Aussage 11: $S(\alpha;\beta)$ ist kombiniert konvex in $(\alpha;\beta)$.

Beweis Sei: $\lambda \in [0,1]$, dann ist nach Aussage 10

$$\begin{array}{rl} & \gamma_{\lambda\alpha+(1-\lambda)\alpha',\lambda\beta+(1-\lambda)\beta';t}(X,X) - (\lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha')(X,X) \\ \geq & \lambda(\gamma_{\alpha,\beta;t}(X,X) - \alpha(X,X)) + (1-\lambda)(\gamma_{\alpha',\beta';t}(X,X) - \alpha')(X,X)) \end{array}$$

Multiplikation der Ungleichung mit -1 liefert die Behauptung.

Aussage 12: Es gilt

$$S(\alpha;\beta)(X) \geq \alpha(X,X)(\ln\alpha(X,X) - \ln\beta(X,X))$$

Beweis Nach Aussage 6 gilt für die quadratische Interpolation $h_{pq;t} \leq p^{(1-t)}q^t$, also

$$\gamma_{\alpha,\beta;t}(X,X) \leq (\alpha(X,X))^{(1-t)}(\beta(X,X))^t.$$

Folglich ist

$$\begin{array}{rcl} -(\gamma_{\alpha,\beta;t}(X,X) - \alpha(X,X)) & \geq & (\alpha(X,X))^{(1-t)}((\alpha(X,X))^t - (\beta(X,X))^t) \\ & = & \alpha(X,X)(1 - (\dfrac{\alpha(X,X)}{\beta(X,X)})^t) \\ & = & \alpha(X,X)(1 - e^{t\ln(\frac{\alpha(X,X)}{\beta(X,X)})}) \\ & \geq & \alpha(X,X)\dfrac{d}{dt}(1 - e^{t\ln(\frac{\alpha(X,X)}{\beta(X,X)})})|_{t=0} \\ & = & \alpha(X,X)(\ln\alpha(X,X) - \ln\beta(X,X)), \end{array}$$

wobei die Konvexität der Exponentialfunktion ausgenunt wurde.

Aussage 13: Sei nun $\Phi : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ und $(\Phi^*\alpha)(X) = \alpha(\Phi X, \Phi Y)$ die adjungierte Abbildung, dann gilt

$$S(\alpha;\beta)(\phi X') \geq S(\Phi^*\alpha;\Phi^*\beta)(x').$$

Beweis: Dies folgt direkt aus Aussage 9.

Aussage 14: Sind $\alpha.\beta$ zwei positive hermitesche Formen auf $\mathcal{T}$ und $\alpha_0.\beta_0$ ihre Einschränkungen auf der Teilraum $\mathcal{T}_0$ von $\mathcal{T}$, dann gilt

$$S(\alpha;\beta)(X_0) \geq S(\alpha_0;\beta_0)(X_0)$$

Beweis: Dies folgt direkt aus der letzten Aussage, wenn Φ die Einbettungsabbildung von $\mathcal{T}_0$ in $\mathcal{T}$ ist.

Aussage 15: Seien $\alpha.\beta,\beta'$ positive hermitesche Formen auf $\mathcal{T}$ und $\beta \geq \beta'$, dann gilt

$$S(\alpha;\beta) \geq S(\alpha;\beta')$$

Beweis: Dies ist eine unmittelbare Folge der Aussage 13.

Im Folgenden sei $\mathcal{A}$ eine *-Algebra mit Einselement $\mathbf{1}$. Füe ein positives lineares Funktional v auf $\mathcal{A}$ betrachte man die positiven hermiteschen Formen

$$v^L(X^*Y) \qquad \text{und} \qquad v^R(XY^*)$$

Aussage 16: Sind v,w positive lineare Funktionale auf $\mathcal{A}$, dann gilt

$$\gamma_{v^R,w^L;t}(X,X) \qquad \text{ist kombiniert konkav in} \qquad (v,w).$$

Beweis: Dies ist Behauptung *(iv)* aus Aussage 10. (Die anderen Behauptungen der Assage 10 gelten natürlich ebenfalls.)

Rie **relative Entropie** zweier positiver linearer Funktionale v,w auf $\mathcal{A}$ ist durch

$$S(v/w) := S(v^R;w^L)(\mathbf{1})$$

definiert. Ist speziell $\mathcal{A}$ die *-Algebra der beschränkten linearen Operatoren des Hilbertraumes, ρ und σ Dichteoperatoren, dann sind $v(A) = \mathrm{tr}(\rho A)$, sowie $w(A) = \mathrm{tr}(\sigma A)$ positive Linearformen, und es ist $v^L(X,Y) = \mathrm{tr}(\rho X^* Y)$ und $v^R(X,Y) = \mathrm{tr}(\rho X Y^*) = \overline{v^L(X,Y)}$ sowie $w^R(X,Y) = \mathrm{tr}(\sigma X Y^*) = \overline{w^L(X,Y)}$. Die in Aussage 10 betrachteten Halbnormen sind dann $p : X \mapsto \sqrt{v^R((X,X)}$ und $q : X \mapsto \sqrt{w^L((X,X)}$, so dass $\gamma_{v^L,w^L;t}(X) =< X, C_{\rho,\sigma;t} X >$ ist, wobei

$$C_{\rho,\sigma;t} = \sqrt[4]{\rho+\sigma}\rho^{1-t}\frac{1}{\sqrt{\rho+\sigma}}\sigma^t\sqrt[4]{\rho+\sigma}.$$

Die Ableitung dieses Operators für $t = 0$ ist mit

$$\frac{d}{dt}\rho^{1-t}|_0 = -\ln 2(\rho\log_2\rho) \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\sigma^t|_0 = -\ln 2(\log_2\sigma)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dt}C_{\rho,\sigma;t}|_0 = \sqrt[4]{\rho+\sigma}\rho(-\log_2\rho\frac{1}{\sqrt{\rho+\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{\rho+\sigma}}\log_2\sigma)\sqrt[4]{\rho+\sigma} = \\ \sqrt[4]{\rho+\sigma}\rho(-\log_2\rho+\log_2\sigma)\frac{1}{\sqrt[4]{\rho+\sigma}} + \sqrt[4]{\rho+\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho+\sigma}},\log_2\sigma\right]\sqrt[4]{\rho+\sigma}.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(\sqrt[4]{\rho+\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho+\sigma}},\log_2\sigma\right]\sqrt[4]{\rho+\sigma}\right) = \\ &\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\rho+\sigma}}\log_2\sigma\sqrt[4]{\rho+\sigma}\right) - \mathrm{tr}\left(\sqrt[4]{\rho+\sigma}\log_2\sigma\frac{1}{\sqrt[4]{\rho+\sigma}}\right) = 0.\end{aligned}$$

Somit ist in diesem Fall

$$\begin{aligned}S(v/w) &= S(v^R;w^L)(\mathbf{1}) = -\mathrm{tr}(\frac{d}{dt}C_{\rho,\sigma;t}|_0) \\ &= \ln 2\mathrm{tr}(\sqrt[4]{\rho+\sigma}\rho(\log_2\rho-\log_2\sigma)\frac{1}{\sqrt[4]{\rho+\sigma}}) \\ &= \ln 2\mathrm{tr}(\rho(\log_2\rho-\log_2\sigma)) \\ &= \ln 2 S(\rho\|\sigma).\end{aligned}$$

Aussage 17: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *-Algebren und $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine lineare Abbildung mit den Eigenscften

$$\Phi(X^*) = \Phi(X)^* \qquad \text{und} \qquad \Phi(X)^*\Phi(X) \leq \Phi(X^*X).$$

Für eine positive Linearform v auf $\mathcal{B}$ bezeiche $v_\Phi(X) := v(\Phi(X))$ die zugehörige positive .Linearform auf $\mathcal{A}$. Dann gilt für jedes Paar positiver Linearformen v, w auf $\mathcal{B}$ stets

$$\gamma_{v^R,w^L;t}(\Phi(X),\Phi(X)) \leq \gamma_{v^R_\Phi,w^L_\Phi;t}(X,X).$$

Beweis: Sei für $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} p(B) &:= \sqrt{v(B^*B)}, & p_\Phi(A) &:= p(\Phi(A)), \\ q(B) &:= \sqrt{v((BB^*)}, & q_\Phi(A) &:= q(\Phi(A)). \end{aligned}$$

Mit Aussage 9 folgt dann

$$\gamma_{\rho^R,w^L;t}(\Phi(A),\Phi(A)) = h_{p,q;t}(\Phi(A))^2 \leq h_{p_\Phi,q_\Phi;t}(A)^2.$$

Nach Voraussetzung ist ferner

$$v^R_\Phi(A,A) = v_\Phi(\Phi(AA^*)) \geq v(\Phi(A)\Phi(A)^*) = p_\Phi(A)^2$$

und ebenso

$$v^L_\Phi(A,A) \geq q(\Phi(A))^2 = q_\Phi(A)^2.$$

Nach Aussage 7 gilt somit

$$h_{p_\Phi,q_\Phi;t}(A)^2 \leq \gamma_{v^R,w^L;t}(A,A),$$

und mit der drittletzten Ungleichung dieses Beweises folgt die behauptete Aussage.

Als Spezialfall dieser Aussage gilt.

Aussage 18: Gilt neben den Vorassetzungen von Aussage 17 noch $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, dann gilt auch

$$S(v/w) = S(v^R; w^L)(\mathbf{1}) \geq S(v^R_\Phi; w^L_\Phi)(\mathbf{1}) = S(v_\Phi/w_\Phi)$$

Sind nun $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die *-Algebren der beschränkten linearen Operatoren derHilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$, sowie $\mathcal{J} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ eine Operation, d.h. eine vollständig positive spurerhaltende Abbildung, dann gibt es lineare Operatoren $C_j : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, so dass für jeden Dichteoperator $\rho \in \mathcal{B}$

$$\mathcal{J}(\rho) = \sum_j C_j \rho C_j^+, \qquad \text{und} \qquad \sum_j C_j^+ C_j = \mathbf{1}$$

gelten. Die bezüglich des Spurfunktionals adjungierte Abbildung $\mathcal{J}' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

$$\mathcal{J}'(A) = \sum_j C^+ A C_j \qquad \text{erfüllt} \qquad \mathcal{J}'(\mathbf{1}) = \sum_j C^+ C_j = \mathbf{1}$$

und ist ebenfalls vollständig positiv. Ist nun v die positive Linearform $\mathrm{tr}(\rho B)$ auf $\mathcal{B}$, dann ist

$$v_{\mathcal{J}'}(A) = \mathrm{tr}(\rho \mathcal{J}'(A)) = \sum_j \mathrm{tr}(\rho C^+ A C_j) = \sum_j \mathrm{tr}(C_j \rho C^+ A) = \mathrm{tr}(\mathcal{J}(\rho) A))$$

und analog

$$w_{\mathcal{J}'}(A) = \mathrm{tr}(\sigma \mathcal{J}'(A)) = \mathrm{tr}(\mathcal{J}(\sigma) A)).$$

Da $\mathcal{J}'$ als positive Abbildung die Voraussetzungen von Aussage 18 erfüllt, gilt damit

$$S(\rho \| \sigma) = \frac{1}{\ln 2} S(v/w) \geq \frac{1}{\ln 2} S(v_{\mathcal{J}'}/w_{\mathcal{J}'}) = S(\mathcal{J}(\rho) \| \mathcal{J}(\sigma)).$$

Damit ist der Folgende Satz bewiesen:

Satz: Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume endlicher Dimension und $\mathcal{J} : \rho \mapsto \sum_j C_j \rho C_j^+$ mit $\sum_j C_j^+ C_j = \mathbf{1}$ eine beliebige Operation, die die Dichteoperatoren von $\mathcal{K}$ in Dichteoperatoren von $\mathcal{H}$ transormiert, dann gilt $S(\rho \| \sigma) \geq S(\mathcal{J}(\rho) \| \mathcal{J}(\sigma))$.

Damit ist gezeigt, dass lokale Operationen $\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2$ jeglicher Art die die v. Neumann Verschränktheit eines bipartiten Zustands ρ nicht erhöhen können, denn

$$E_{v.N.}((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho) \leq S((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho \| (\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\sigma_0) \leq S(\rho \| \sigma_0) = E_{v.N.}(\rho),$$

wobei $\sigma_0 \in \mathcal{D}$ ein unverschränkter Zustand ist, für den $S(\rho \| \sigma_0)$ minimal ist. Mithin gilt diese Aussage auch für multipartite Zustände.